Aula extra

A fórmula de Euler

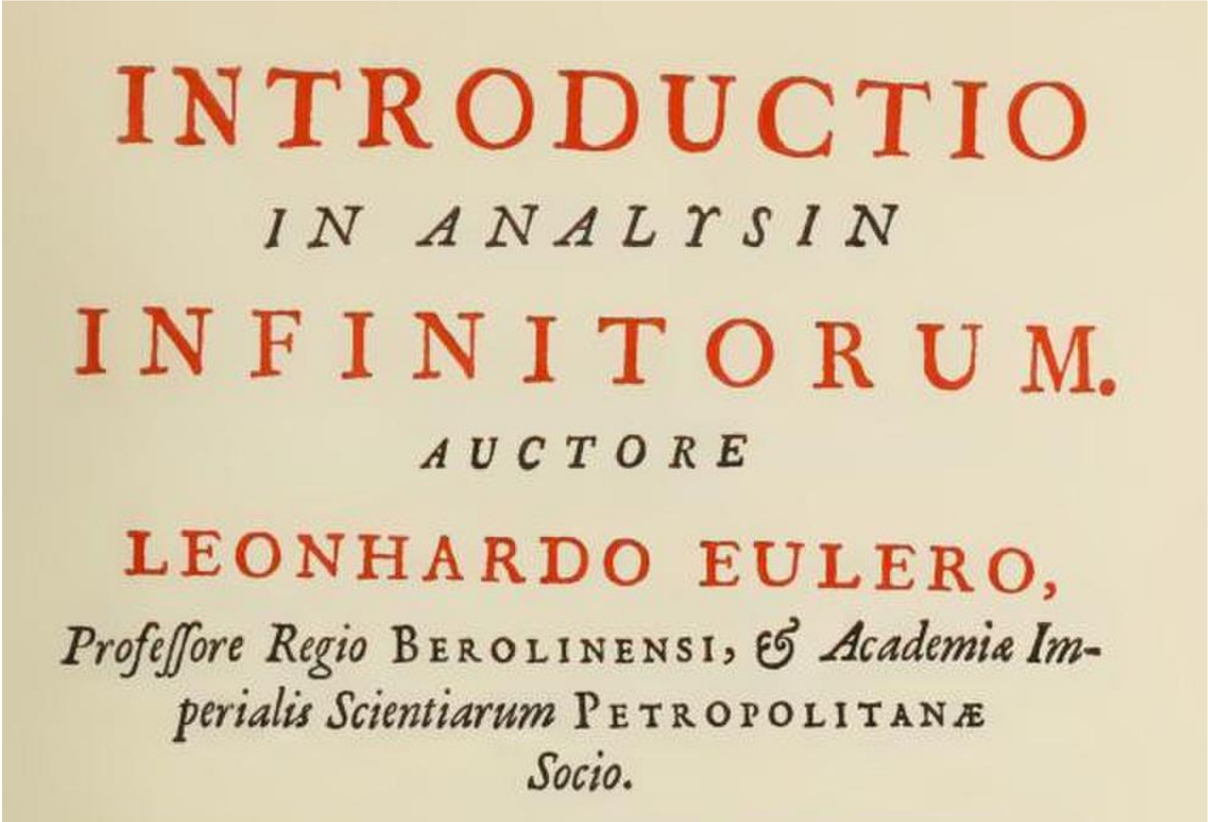
Circuitos Elétricos I

Prof. Henrique Amorim - UNIFESP - ICT

A identidade de Euler

Quando Leonhard Euler lecionava na Academia de Berlim ele publicou o artigo “Introductio in Analysin Infinitorum”. Esta foi a primeira menção da identidade de Euler, sua descoberta revolucionou a matemática, física, mecânica, óptica, teoria musical e etc.

Compreender esta relação será fundamental para entendermos a correlação entre as análises nos domínios do tempo e frequência.


INTRODUCTIO
IN ANALYSIN
INFINITORUM.
AUCTORE
LEONHARDO EULERO,
Profeſſore Regio BEROLINENSI, & *Academiæ Im-*
perialis Scientiarum PETROPOLITANÆ
Socio.

$$e^{ix} = \cos(x) + i \cdot sen(x)$$

A identidade de Euler

A constante de Euler não foi diretamente descoberta por Euler. Foi na verdade a solução de um desafio matemático proposto Jacob Benoulli. Este desafio tratava sobre juros compostos.

Considere que você invista 1 real a um lucro de 100% ao ano, desta forma você teria:

$$T = 1 \cdot (1 + 100\%)$$

Se pudesse receber o lucro duas vezes ao ano teria:

$$T = 1 \cdot \left(1 + \frac{100\%}{2}\right) \cdot \left(1 + \frac{100\%}{2}\right)$$

Se pudesse receber o lucro N vezes ao ano teria:

$$T = 1 \cdot \left(1 + \frac{100\%}{N}\right)^N$$

A constante de Euler

Qual seria a melhor opção?

$$T = 1 \cdot \left(1 + \frac{100\%}{1}\right)^{1} = 2 \qquad T = 1 \cdot \left(1 + \frac{100\%}{2}\right)^{2} = 2{,}25 \qquad T = 1 \cdot \left(1 + \frac{100\%}{12}\right)^{12} = 2{,}61$$

$$T = 1 \cdot \left(1 + \frac{100\%}{52}\right)^{52} = 2{,}69 \qquad T = 1 \cdot \left(1 + \frac{100\%}{365}\right)^{365} = 2{,}71$$

Notem que existe uma convergência valor do lucro. O desafio estava em descobrir qual o valor final frente ao um N que tende ao infinito, ou seja:

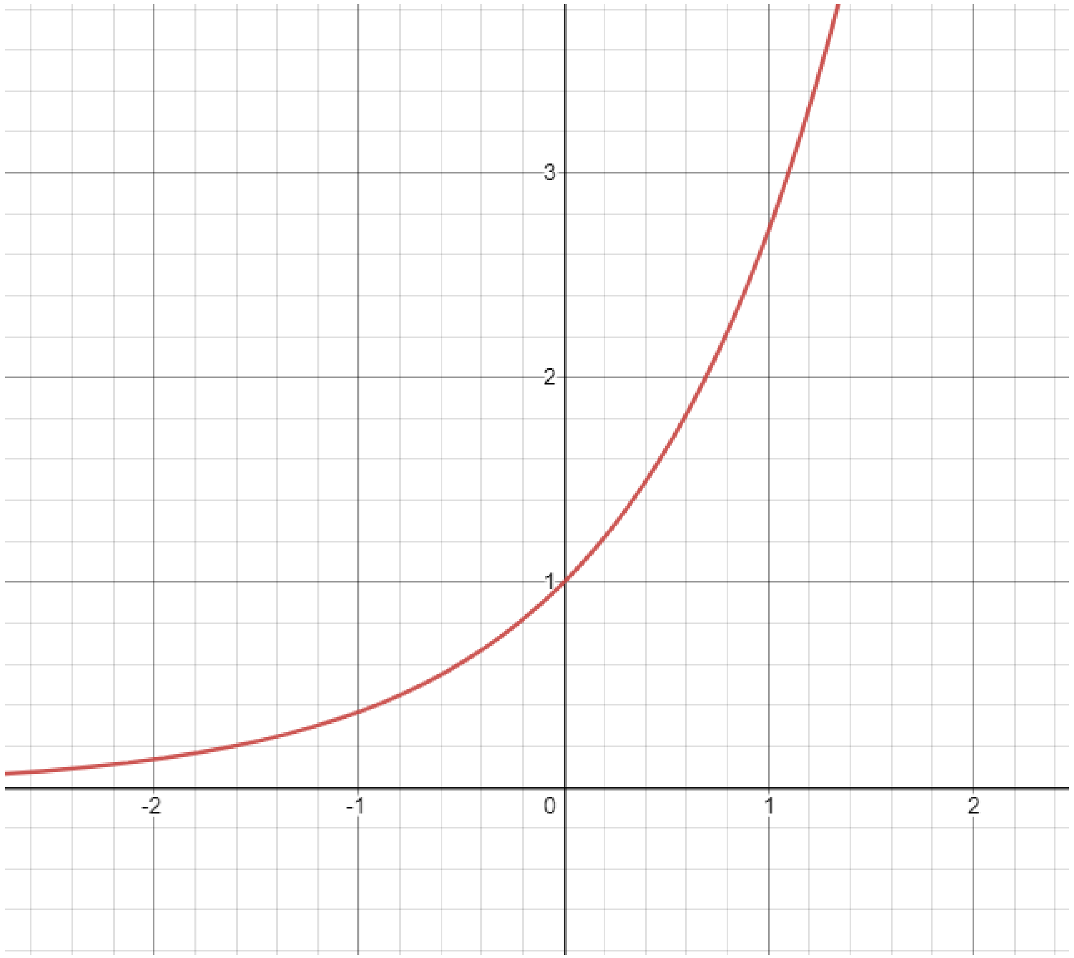
$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n} = 2{,}7182\ldots = e$$

Euler resolveu o desafio propondo uma constante irracional, batizade de e

Função e^x

A função e^x ganhou muita notoriedade pois o ângulo de uma reta tangente, para qualquer ponto na curva, também resulta em e^x. Ou seja a derivada de e^x é igual a e^x

$$e^x = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$



Série de Maclaurin

Relembrando séries de Taylor Maclaurin

Podemos aproximar funções utilizando a série de Maclaurin (polinômio de Taylor centrado em x=0 com infinitos termos)

$$P(x) = \frac{f(0) \cdot x^0}{0!} + \frac{f(0)' \cdot x^1}{1!} + \frac{f(0)'' \cdot x^2}{2!} + \frac{f(0)''' \cdot x^3}{3!} + \cdots + \frac{f(0)'^n \cdot x^n}{n!} +$$

Série de Maclaurin para e^x

Utilizando séries de Maclaurin podemos aproximar o valor da constante de Euler

$$e^x = 1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

$$e^1 = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots + \frac{1}{n!} = 2{,}7182\ldots$$

Série de Maclaurin para senoides

Também por meio da série de Maclaurin podemos aproximar o valor da senos e cossenos

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^8}{8!} + \cdots$$

$$\operatorname{sen}(x) = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

Comparação das séries

As séries de Euler, seno e cosseno são muito similares entre si

$$e^{x} = 1 + \frac{x^{1}}{1!} + \frac{x^{2}}{2!} + \frac{x^{3}}{3!} + \frac{x^{4}}{4!}$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^{2}}{2!} + \frac{x^{4}}{4!} - \frac{x^{6}}{6} + \frac{x^{8}}{8!} + \cdots$$

$$\operatorname{sen}(x) = \frac{x}{1} - \frac{x^{3}}{3!} + \frac{x^{5}}{5!} - \frac{x^{7}}{7!} + \cdots$$

Soma de cosseno e seno

Quando somamos as séries de seno e cosseno chegamos muito próximo a série de Euler. A única diferença observada é a alternância dos sinais nas somas de seno e cosseno.

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^8}{8!} + \cdots$$

$$\text{sen}(x) + cos(x) = 1 + \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^8}{8!} + \cdots$$

Soma de cosseno e seno

Para igualarmos as equações, será necessário encontrar um número que multiplicado por alguns fatores da série alterne os sinais da série.

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^8}{8!} + \cdots$$

? ? ? ?

$$\cos(x) + sen(x) = 1 + \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^8}{8!} + \cdots$$

Número complexo

O número em questão deverá ser compatível com a relação abaixo

$$n^2 = -1$$

Para resolvermos as igualdades entre as séries iremos utilizar o número (complexo) imaginário ou i

$$i = \sqrt{-1}$$

Série de Maclaurin para $\boldsymbol{e^{ix}}$

Se ao invés de desenvolvermos a série de Maclaurin com e^x utilizarmos e^{ix}, teremos:

$$e^{ix} = 1 + \frac{(ix)^1}{1!} + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \cdots + \frac{(ix)^n}{n!}$$

Onde:

$$i^2 = -1 \qquad i^3 = -i \qquad i^4 = 1 \qquad i^5 = i$$

Organizando os termos

Portanto:

$$e^{ix} = 1 + \frac{ix}{1!} - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{ix^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} - \frac{ix^7}{7!} + \frac{x^8}{8!}$$

Reorganizando:

$$e^{ix} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + i\left(\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}\right)$$

$$e^{ix} = \underbrace{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!}}_{\cos(x)} + \underbrace{i\left(\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}\right)}_{i \cdot \mathrm{sen}(x)}$$

$$\cos(x) \qquad + \qquad i \cdot \mathrm{sen}(x)$$

Assim chegamos a fórmula de Euler

$$\boxed{e^{ix} = \cos(x) + i \cdot sen(x)}$$

(Este será o portal para a análise no domínio da frequência)

Conceito e

Quando substituímos x por π, chegamos a mais bela equação matemática: a Identidade de Euler.

$$\boxed{e^{i\pi} + 1 = 0}$$

Esta bela relação agrupa 4 conceitos completamente diferentes

- Número de Euler
- π
- Cosseno e Seno
- Número complexo