Aula 10

Revisão dos Circuitos de Primeira Ordem

Circuitos Elétricos II

Prof. Henrique Amorim - UNIFESP - ICT

Conceito

Resistores: Elemento linear passivo que exclusivamente dissipa energia

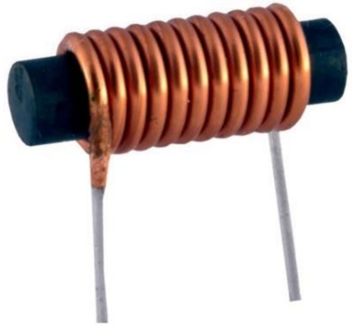
Capacitores e indutores: Elementos lineares passivos que armazenam energia que posteriormente pode ser recuperada

Resistores
Invariantes no tempo

Capacitores e Indutores
Variantes no tempo

Capacitor

Indutor

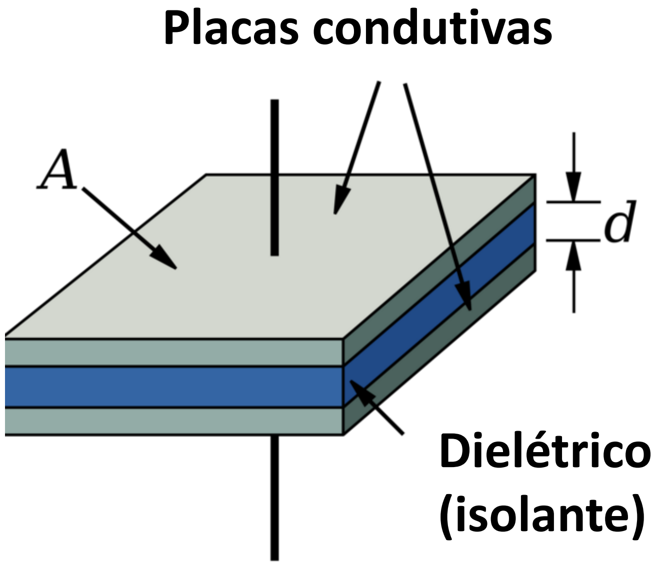


Capacitor

- O capacitor armazena cargas em forma de um **campo elétrico**
- A quantidade de carga armazenada é diretamente proporcional a tensão v aplicada.

$$q = Cv$$

Onde C é a capacitância medida em Farad (F)
q é a carga medida em Columb (C)



$$C = \frac{\varepsilon A}{d}$$

Principais tipos

Capacitor – Associações

Associação em **série de capacitores** (Análogo a associação em **paralelo de resistores**)

$$C_{eq} = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots + \frac{1}{C_n}\right)^{-1}$$

$$\left(C_{eq} = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2}\right)$$

2 Capacitores

$$v_{eq}(t_0) = v_1(t_0) + v_2(t_0) + \cdots + v_n(t_0)$$

Associação em **paralelo de capacitores** (Análogo a associação em **série de resistores**)

$$C_{eq} = C_1 + C_2 + \cdots + C_n$$

Capacitor – Principais relações

- A tensão em capacitor não pode mudar de forma abrupta
- O capacitor bloqueia a passagem de CC
- O capacitor é um circuito aberto em CC

Corrente

$$\boldsymbol{i(t) = C\frac{dv}{dt}}$$

Tensão

$$\boldsymbol{v(t) = \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(\tau)d\tau + v(t_0)}$$

Energia

$$\boldsymbol{w = \frac{1}{2}Cv^2}$$

Impedância

$$\boldsymbol{Z_C = \frac{1}{j\omega C}}$$

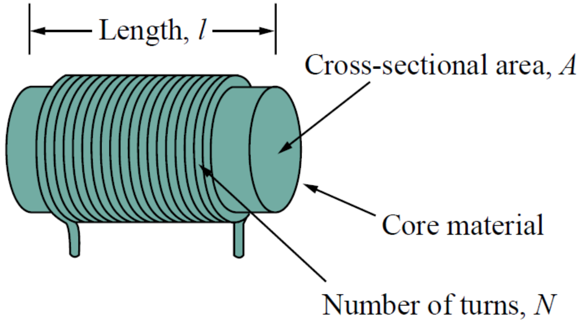
Indutores

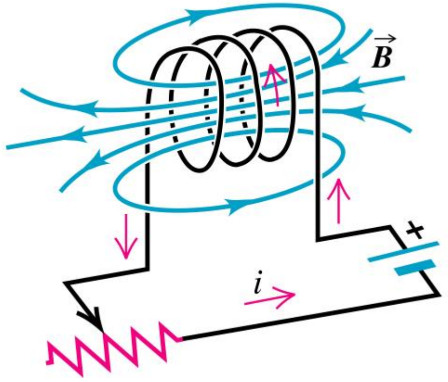
- Indutores são elementos passivos que armazém energia em seu **campo magnético**
- Consiste em uma bobina de fio condutor.
- L é a constante de proporcionalidade, denominada de indutância e medida em Henrys (H)

$$L = \frac{N^2 \mu A}{l}$$

A tensão entre os terminais diretamente proporcional a variação de corrente

Principais tipos





Indutores – Associações

Associação em **série de indutores** (Análogo a associação em **série de resistores**)

$$L_{eq} = L_1 + L_2 + \cdots + L_n$$

Associação em **paralelo de indutores** (Análogo a associação em **paralelo de resistores**)

$$L_{eq} = \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \cdots + \frac{1}{L_n}\right)^{-1}$$

$$\left(L_{eq} = \frac{L_1 \cdot L_2}{L_1 + L_2}\right)$$

2 indutores

$$i_{eq}(t_0) = i_1(t_0) + i_2(t_0) + \cdots + i_n(t_0)$$

Indutor – Principais relações

- A corrente que flui através de um indutor não pode variar abruptamente
- O indutor é um curto circuito em CC

Tensão

$$v(t) = L\frac{di}{dt}$$

Corrente

$$i(t) = \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v(\tau)d\tau + i(t_0)$$

Energia

$$w = \frac{1}{2}Ci^2$$

Impedância

$$Z_L = j\omega L$$

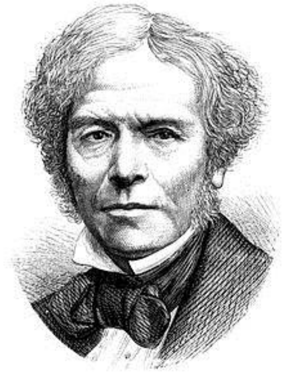
RLC Resumão

TABLE 6.1 Important characteristics of the basic elements.†

Relation	Resistor (R)	Capacitor (C)	Inductor (L)
v-i:	$v = iR$	$v = \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i\,dt + v(t_0)$	$v = L\frac{di}{dt}$
i-v:	$i = v/R$	$i = C\frac{dv}{dt}$	$i = \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} i\,dt + i(t_0)$
p or w:	$p = i^2R = \frac{v^2}{R}$	$w = \frac{1}{2}Cv^2$	$w = \frac{1}{2}Li^2$
Series:	$R_{eq} = R_1 + R_2$	$C_{eq} = \frac{C_1C_2}{C_1 + C_2}$	$L_{eq} = L_1 + L_2$
Parallel:	$R_{eq} = \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2}$	$C_{eq} = C_1 + C_2$	$L_{eq} = \frac{L_1L_2}{L_1 + L_2}$
At dc:	Same	Open circuit	Short circuit
Circuit variable that cannot change abruptly:	Not applicable	v	i

† *Passive sign convention is assumed.*

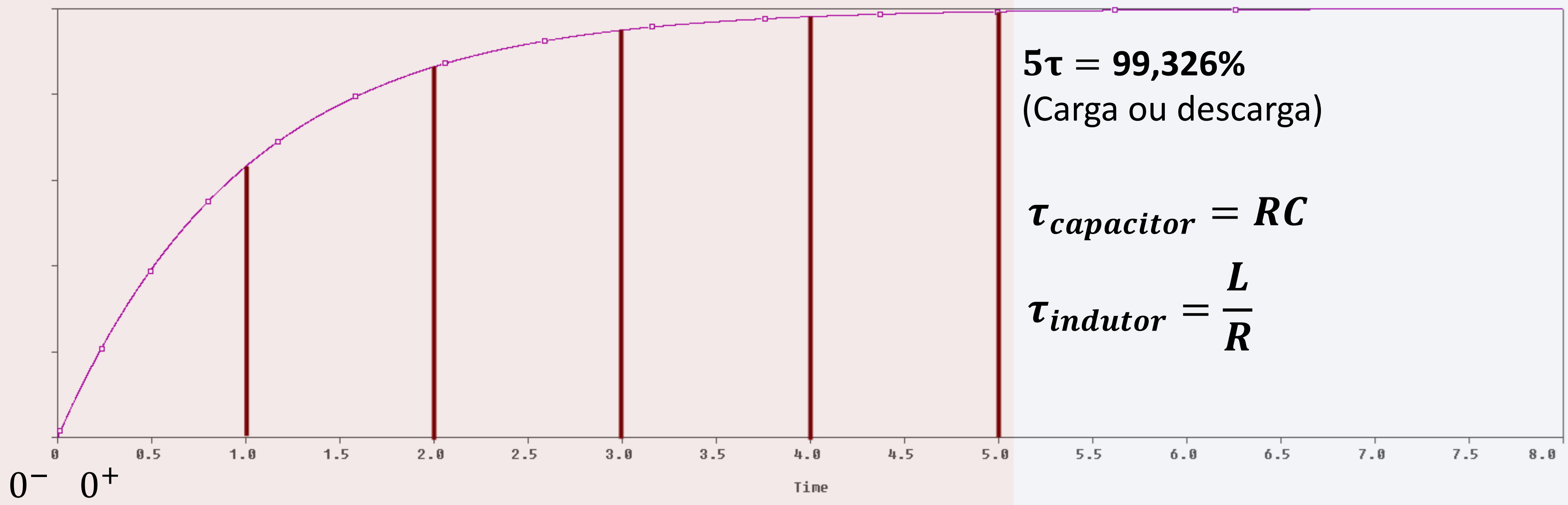
Michael Faraday (1791–1867)



Joseph Henry (1797–1878)

Circuitos de Primeira Ordem - Resposta

Gráfico genérico da resposta completa de um circuito de primeira ordem (degrau sem carga inicial)



5τ = 99,326%
(Carga ou descarga)

$$\tau_{capacitor} = RC$$

$$\tau_{indutor} = \frac{L}{R}$$

Resposta transiente: resposta temporária do circuito que se extinguirá com o tempo

Resposta em regime estacionário: comportamento um longo tempo após excitação

$$Resp_{completa} = Resp_{estac} + Resp_{trans}$$

$$x(t) = x(t_f) + \left(x(t_0) - x(t_f)\right) \cdot e^{-\frac{\Delta t}{\tau}}$$

$$t^- \rightarrow pré\ ação \quad \mathbf{e} \quad t^+ \rightarrow pós\ ação$$

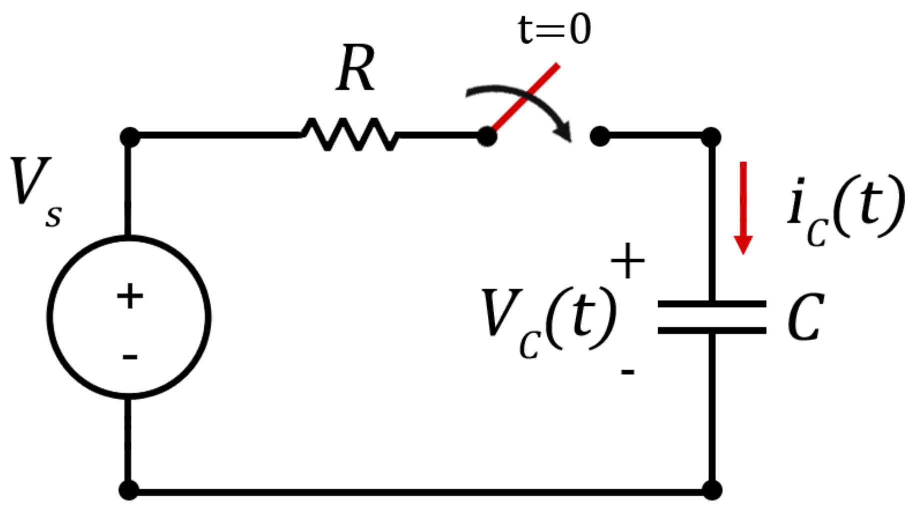
Circuitos de Primeira Ordem - RC

Análise das repostas do circuito RC

$\boldsymbol{\tau = RC}$ $\qquad$ $\boldsymbol{DC} \rightarrow$ **Circuito Aberto**

Equação Geral para $\boldsymbol{0 \leq t < \infty}$

$$\boldsymbol{x(t) = x(0) + \left(x(0) - x(\infty)\right) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}}$$



Resposta Forçada

Equações válidas para $0 \leq t < \infty$

Presença de uma fonte constante $V_s \neq 0$

1. $v_C(t)\ com\ V_o \neq 0$
2. $v_C(t)\ com\ V_o = 0$

3. $i_C(t)\ com\ V_o \neq 0$
4. $i_C(t)\ com\ V_o = 0$

Resposta Natural

Equações válidas para $0 \leq t < \infty$

Sem Presença de uma fonte $V_s = 0$
Capacitor com carga inicial $V_o = 0$

5. $v_C(t)$
6. $i_C(t)$

Circuitos de Primeira Ordem - RC

Equação Geral para tensão do capacitor ($0 \le t < \infty$)

$$v_c(t) = v_c(\infty) + \left(v_c(0) - v_c(\infty)\right) \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$$

Equação Geral para corrente do capacitor ($0 \le t < \infty$)

$$i_c(t) = i_c(\infty) + \left(i_c(0) - i_c(\infty)\right) \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$$

** Equações de acordo com a numeração do slide anterior

$$\tau = RC$$

Resposta Forçada (degrau)

1. $v_C(t) = V_s + (V_0 - V_s) \cdot e^{-t/\tau}$

2. $v_C(t) = V_S \cdot (1 - e^{-t/\tau})$

3. $i_C(t) = \left(\frac{V_S - V_O}{R}\right) \cdot e^{-t/\tau}$

4. $i_C(t) = \frac{V_S}{R} \cdot e^{-t/\tau}$

Resposta Natural

5. $v_C(t) = V_0 \cdot e^{-t/\tau}$

6. $i_C(t) = -\frac{V_O}{R} \cdot e^{-t/\tau}$

A corrente do capacitor inverte na relação carga-descarga. A tensão do capacitor não varia de forma brusca (integral)

Circuitos de Primeira Ordem - RL

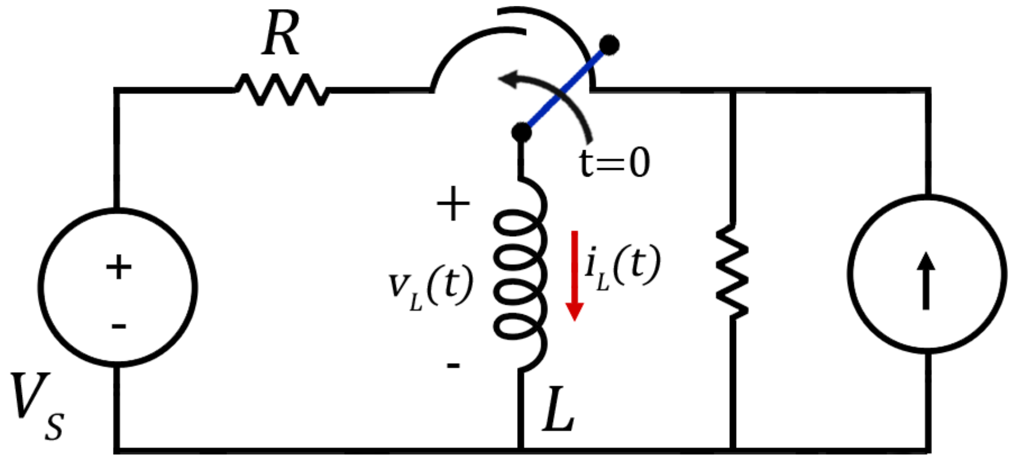
Análise das repostas do circuito RL

$$\boldsymbol{\tau = \frac{L}{R}}$$

$\boldsymbol{DC} \rightarrow$ **Curto Circuito**

Equação Geral para $\boldsymbol{0 \leq t < \infty}$

$$\boldsymbol{x(t) = x(\infty) + \big(x(0) - x(\infty)\big) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}}$$



Resposta Forçada

Equações válidas para $0 \leq t < \infty$

Presença de uma fonte constante $V_s \neq 0$

1. $i_L(t)\ com\ I_o \neq 0$
2. $i_L(t)\ com\ I_o = 0$

3. $v_L(t)\ com\ I_o \neq 0$
4. $v_L(t)\ com\ I_o = 0$

Resposta Natural

Equações válidas para $0 \leq t < \infty$

Sem Presença de uma fonte $V_s = 0$

Indutor com carga inicial $I_o = 0$

5. $i_L(t)$
6. $v_L(t)$

Circuitos de Primeira Ordem - RL

Equação Geral para corrente do indutor ($0 \leq t < \infty$)

$$\boldsymbol{i_L(t) = i_L(\infty) + \left(i_L(0) - i_L(\infty)\right) \cdot e^{-t \cdot \frac{R}{L}}}$$

Equação Geral para tensão do indutor ($0 \leq t < \infty$)

$$\boldsymbol{v_L(t) = v_L(\infty) + \left(v_L(0) - v_L(\infty)\right) \cdot e^{-t \cdot \frac{R}{L}}}$$

** Equações de acordo com a numeração do slide anterior

$$\boldsymbol{\tau = \frac{L}{R}}$$

Resposta Forçada (degrau)

1. $i_L(t) = \frac{V_S}{R} + \left(I_0 - \frac{V_S}{R}\right) \cdot e^{-t/\tau}$

2. $i_L(t) = \frac{V_S}{R} \cdot (1 - e^{-t/\tau})$

3. $v_L(t) = (V_S - R \cdot I_0) \cdot e^{-t/\tau}$

4. $v_L(t) = V_S \cdot e^{-t/\tau}$

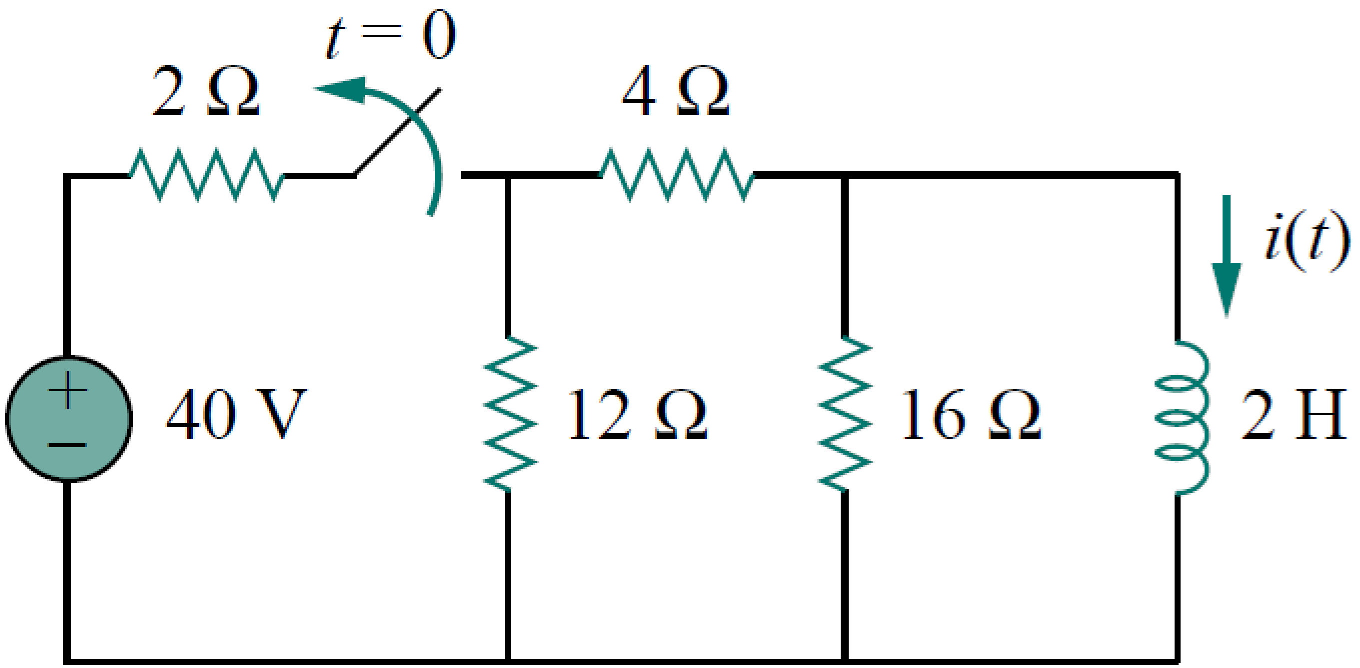
Resposta Natural

5. $i_L(t) = I_0 \cdot e^{-t/\tau}$

6. $v_L(t) = -I_0 \cdot R \cdot e^{-t/\tau}$

A tensão do indutor inverte na relação “carga-descarga”. A corrente do indutor não varia de forma brusca (integral)

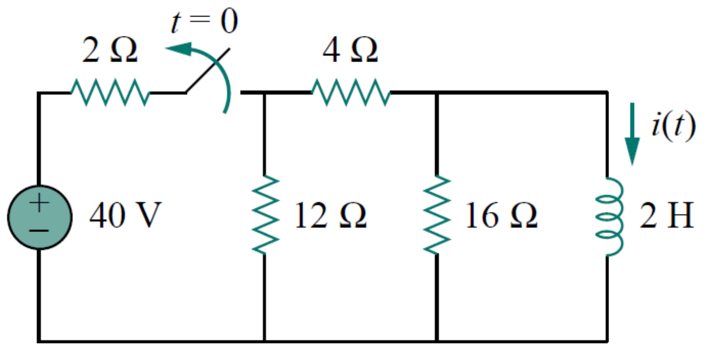
Exercício: A chave passou um longo período fechada. Encontre i(t).

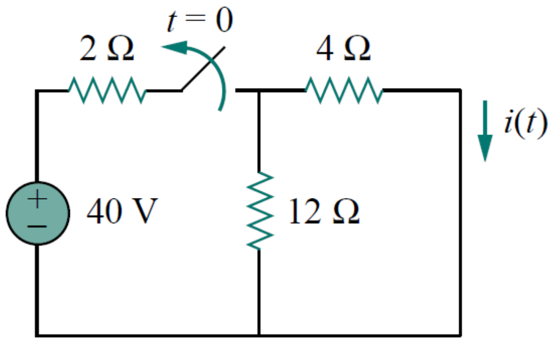


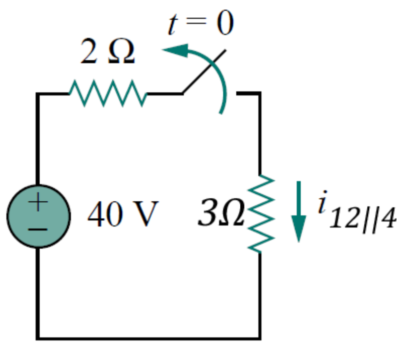
Resposta:

$$\boldsymbol{i(t) = 6 \cdot e^{-4t} A}$$

Exercício: A chave passou um longo período fechada. Encontre i(t).







$$R_{4\,||\,12} = 4\,||\,12 = 3\Omega$$

$$i_{4\,||\,12} = \frac{40}{5} = 8A$$

$$I_{4\Omega} = I_0 = 8 \cdot \frac{12}{12+4} = 6A$$

Como o indutor se comporta como um curto circuito, não há corrente no resistor de 16Ω, assim se encontrarmos a corrente que passa pelo resistor de 4Ω teremos I0.

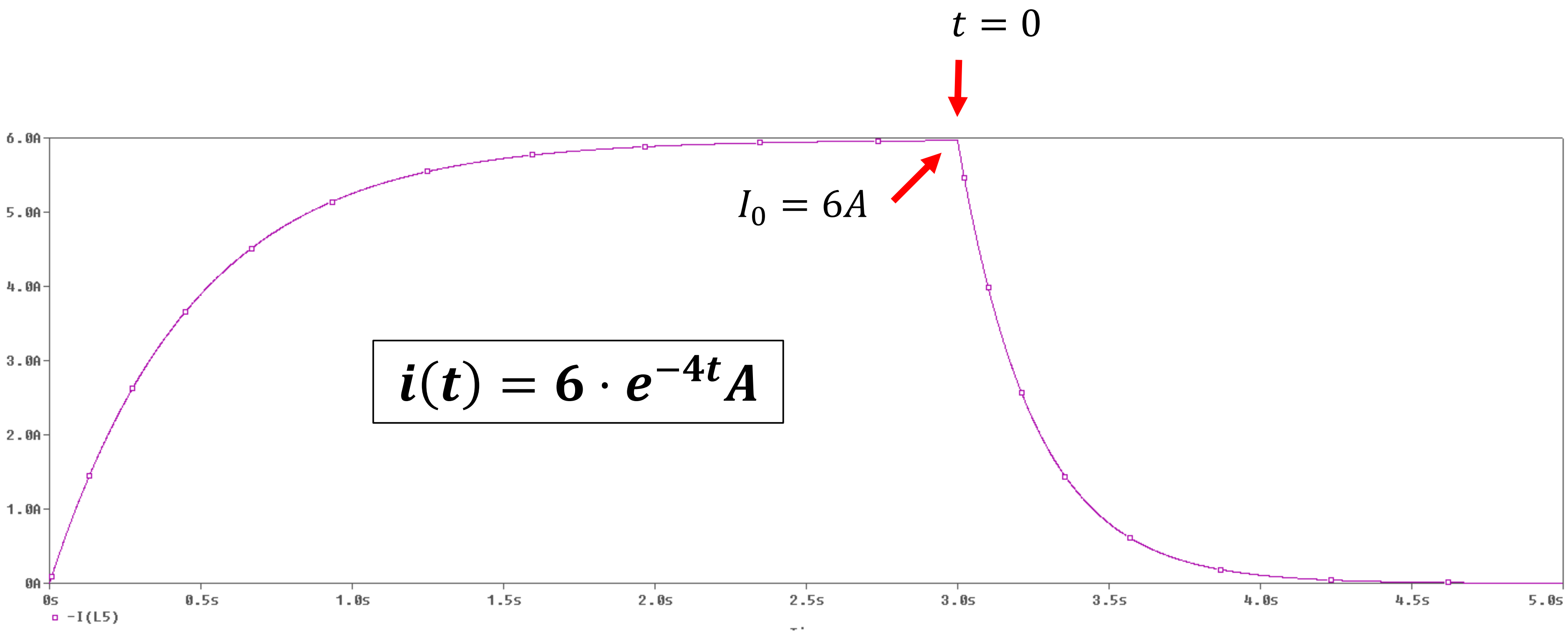
$$R_\tau = (4+12)\,||\,16 = 8\Omega$$

$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{2}{8} = 0{,}25s \qquad \frac{1}{\tau} = 4$$

$$\boxed{\boldsymbol{i(t) = 6 \cdot e^{-4t} A}}$$

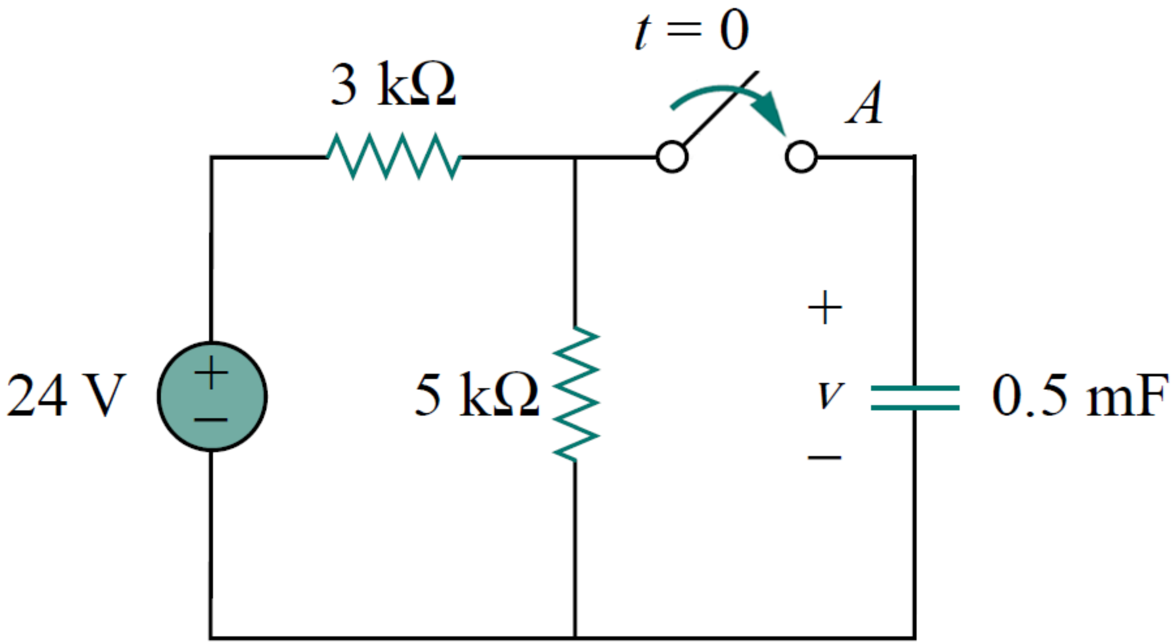
Exercícios

Exercício: A chave passou um longo período fechada. Encontre i(t).



$$\boxed{i(t) = 6 \cdot e^{-4t} A}$$

Exercício: Quando t=0 a chave é posicionada em A, calcule o tempo necessário para que o capacitor atinja aproximadamente 86% da sua carga (2τ) e a tensão neste instante . Considere que o capacitor não possui carga inicial.

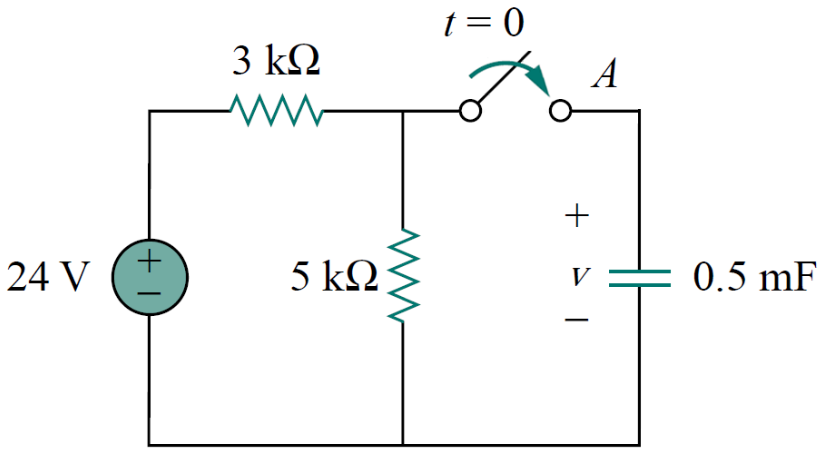


$$2\tau = 1,875s \qquad v(2\tau) = 12,97V$$

Exercícios

Exercício: Quando t=0 a chave é posicionada em A, calcule o tempo necessário para que o capacitor atinja aproximadamente 86% da sua carga (2τ) e a tensão neste instante . Considere que o capacitor não possui carga inicial.

Primeiro calculamos o equivalente de Thévenin em relação aos terminais do capacitor



$$V_{th} = 24 \cdot \frac{5K}{3K + 5K} = 15V$$

$$R_{th} = 3K\,||\,5K = 1{,}875K\Omega$$

$$\tau = R_{th}C = 1{,}875K \cdot 0{,}5m = 0{,}9375s$$

$$2\tau = 2 \cdot 0{,}9375 = 1{,}875s$$

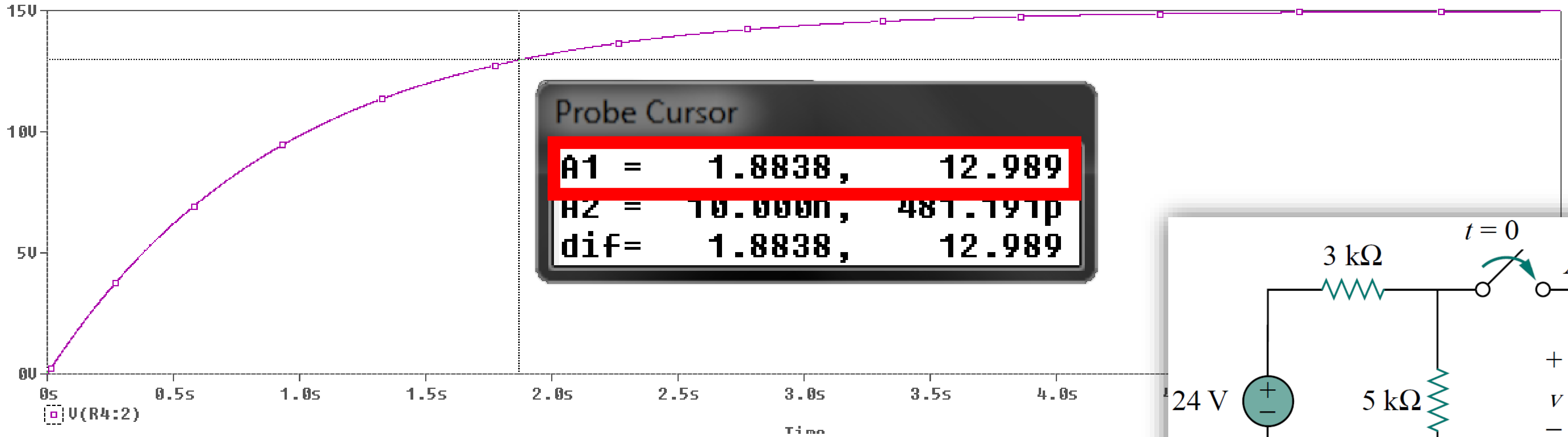
$$v_c(t) = \ V_{th} \cdot (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

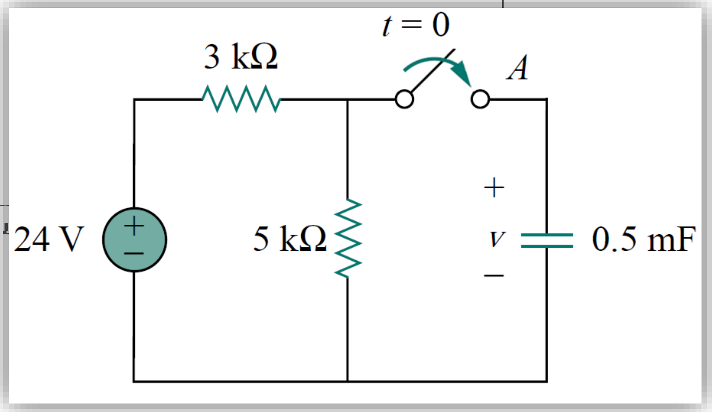
$$v_c(t) = \ 15 \cdot (1 - e^{-\frac{t}{0{,}9375}})$$

$$v_c(2\tau) = \ 15 \cdot (1 - e^{-2})$$

$$\boldsymbol{v(2\tau) = 12{,}97V}$$

Exercício: Quando t=0 a chave é posicionada em A, calcule o tempo necessário para que o capacitor atinja aproximadamente 86% da sua carga (2τ) e a tensão neste instante . Considere que o capacitor não possui carga inicial.

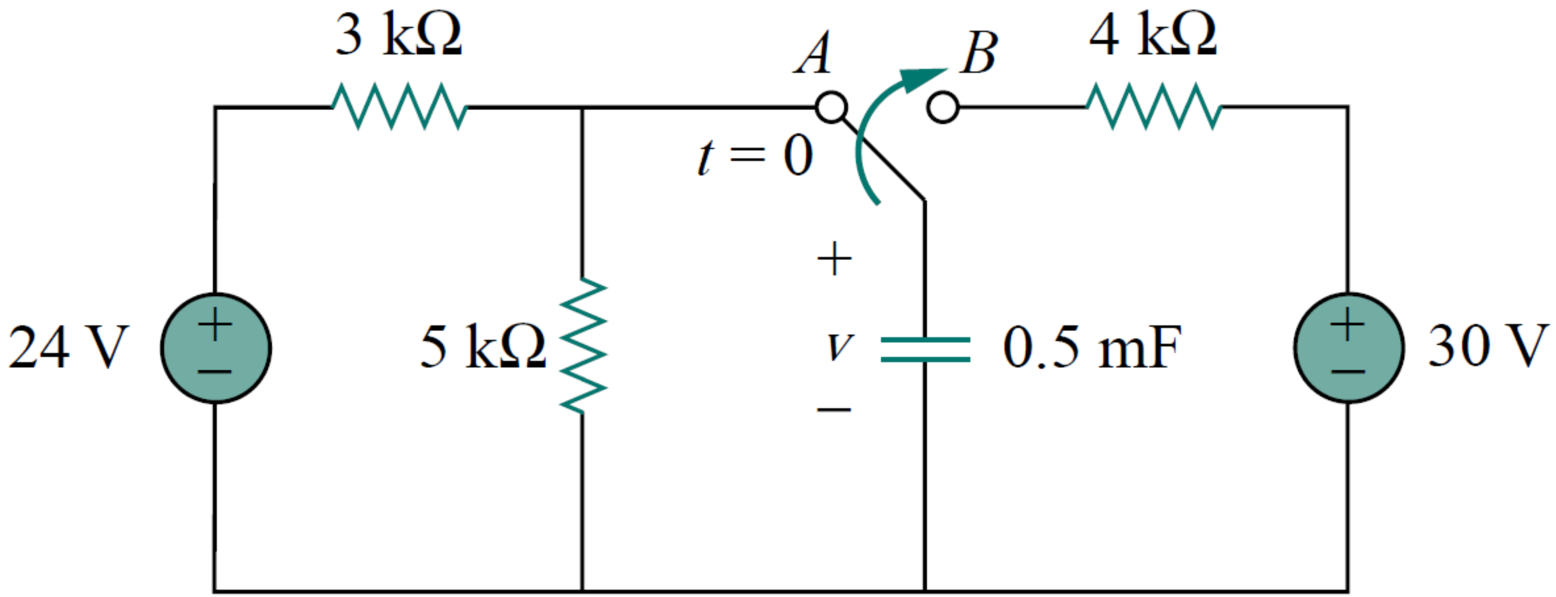




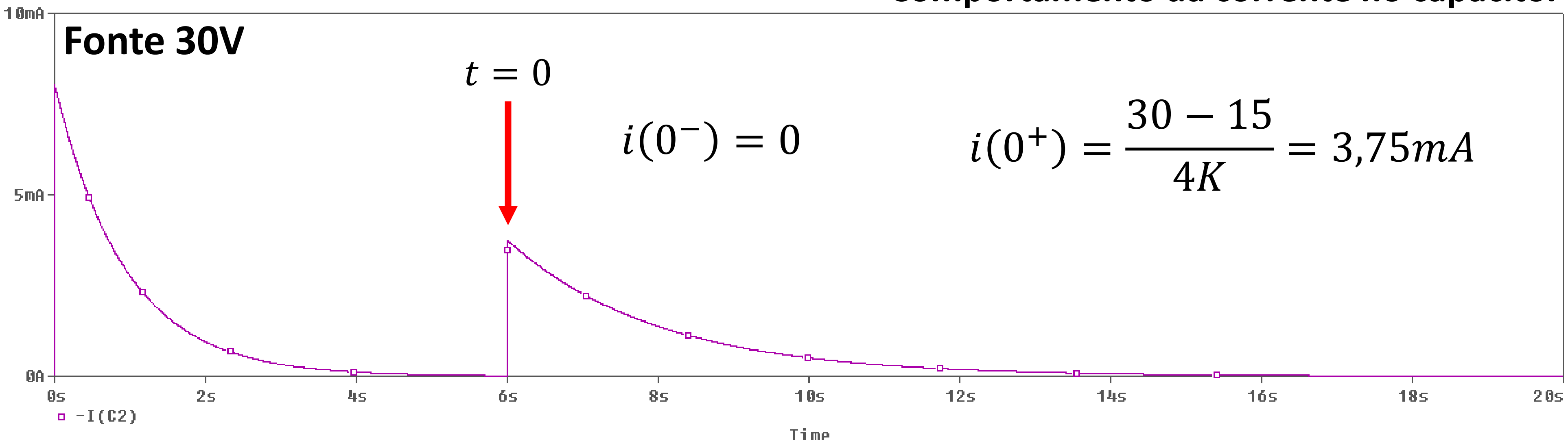
$$2\tau = 2 \cdot 0,9375 = 1,875s \qquad v(2\tau) = 12,97V$$

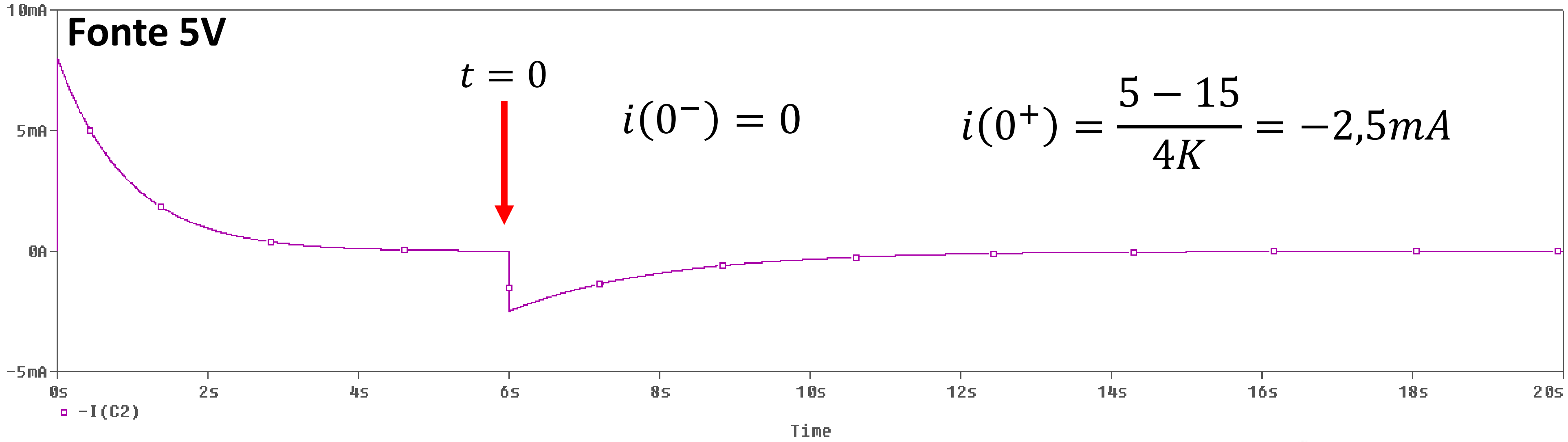
Exercícios

Exercício: Considere o circuito abaixo. Analise $i(0^-)\ e\ i(0^+)$ no instante que a chave muda para B. Caso a fonte de 30 seja substituída por uma fonte de 5V, como ficariam os novos $i(0^-)\ e\ i(0^+)$. Desenho graficamente as respostas



Comportamento da corrente no capacitor





Exercícios

Comportamento da tensão no capacitor