Aula 11

Revisão de Fasores e Introdução a Laplace

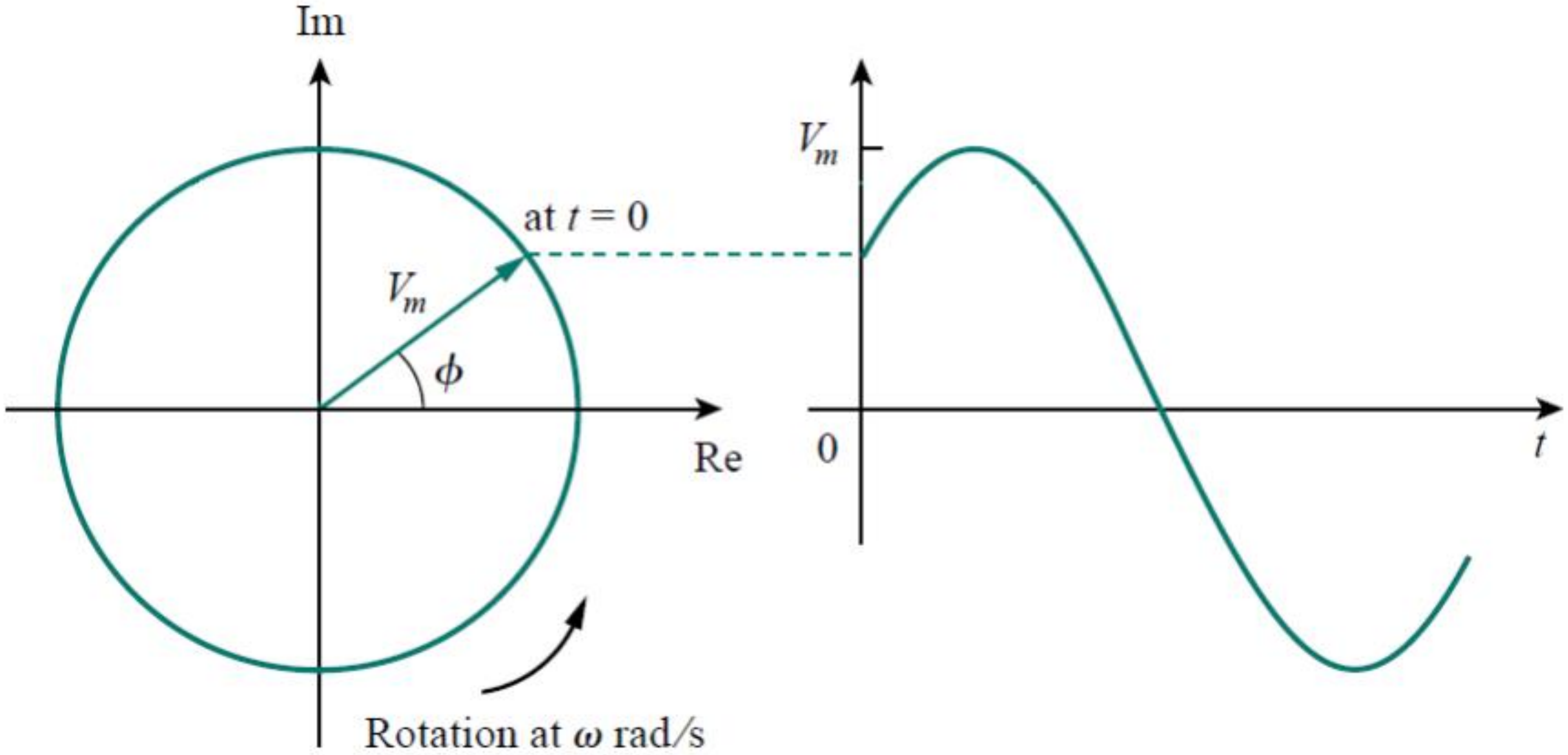
Circuitos Elétricos II

Prof. Henrique Amorim - UNIFESP - ICT

Revisão - Fasor

Definição: Fasor é a representação complexa da magnitude e fase de uma senoide.

$$\mathbb{V} = V_m e^{j\theta} = V_m \angle \phi \qquad v(t) = V_m \cos(\omega t + \phi) = \Re(\mathbb{V} \cdot e^{j\omega t})$$

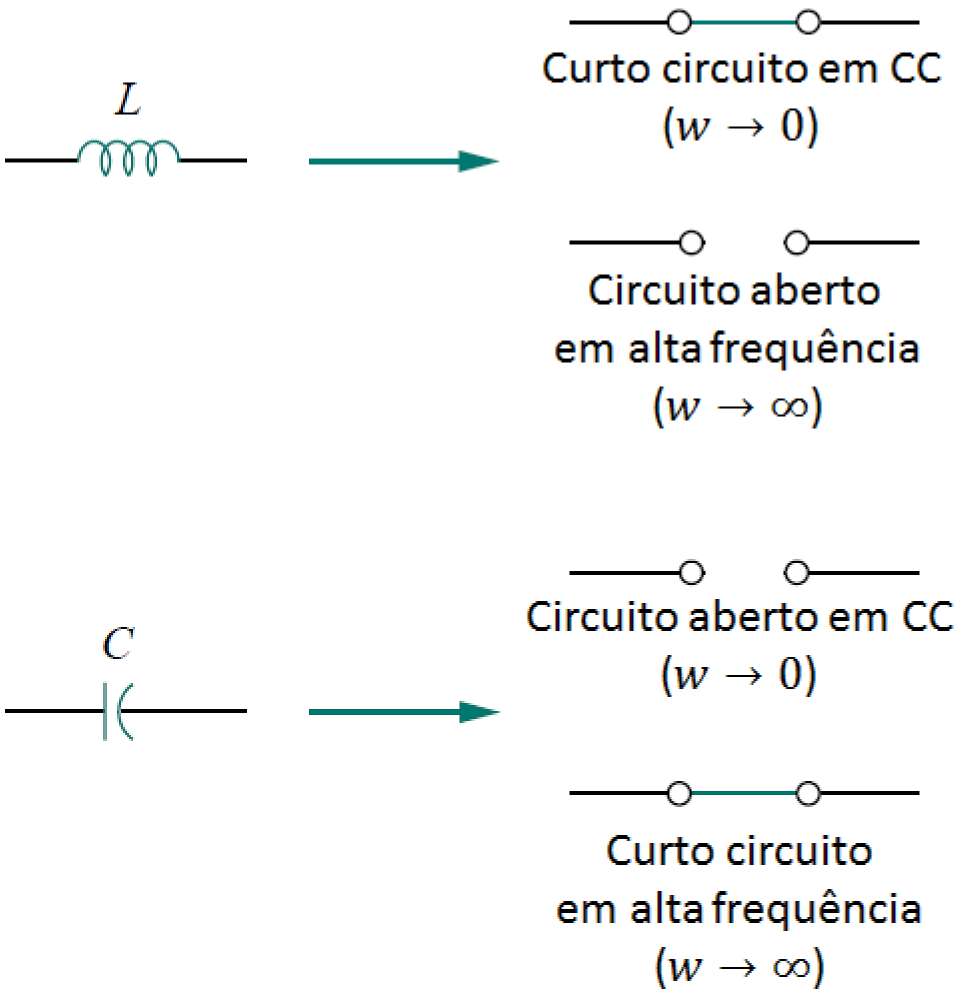


Tensão, corrente e impedância

Impedância representa a oposição que um circuito oferece ao fluxo de corrente senoidal

Impedância e admitância de elementos passivos

Elemento	Impedância	Admitância
R	$\mathbf{Z} = R$	$\mathbf{Y} = \dfrac{1}{R}$
L	$\mathbf{Z} = j\omega L$	$\mathbf{Y} = \dfrac{1}{j\omega L}$
C	$\mathbf{Z} = \dfrac{1}{j\omega C}$	$\mathbf{Y} = j\omega C$



Números complexos – Transformações

Retangular $\rightarrow$ Polar

Temos:
$z = x + jy$

Queremos:
$z = r\angle\phi$

$$\boldsymbol{r = \sqrt{x^2 + y^2}}$$
$$\boldsymbol{\phi = \mathbf{atan}\left(\frac{y}{x}\right)}$$

Polar $\rightarrow$ Retangular

Temos:
$z = r\angle\phi$

Queremos:
$z = x + jy$

$$\boldsymbol{x = r \cdot cos(\phi)}$$
$$\boldsymbol{y = r \cdot \mathbf{sen}(\phi)}$$

Como a forma exponencial utiliza as relações polares, assim:

Retangular $\rightarrow$ Exponencial

Transformar para polar e:

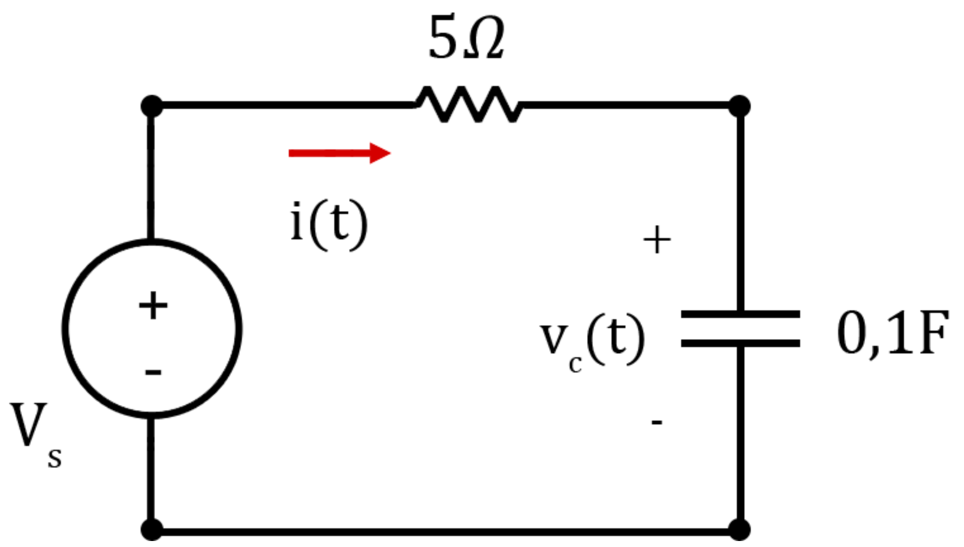
$$\boldsymbol{z = r \cdot e^{j\phi}}$$

Polar $\rightarrow$ Exponencial

Apenas colocar na forma:

$$\boldsymbol{z = r \cdot e^{j\phi}}$$

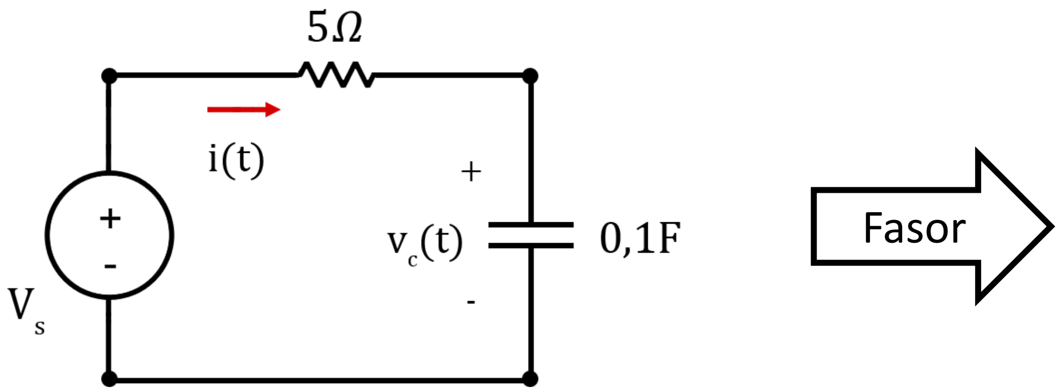
Exercício: Dado o circuito, em regime permanente, encontre a expressão $v_c(t)$. Considere que $\boldsymbol{V_s(t) = 10 \cdot \cos(4t)\, V}$

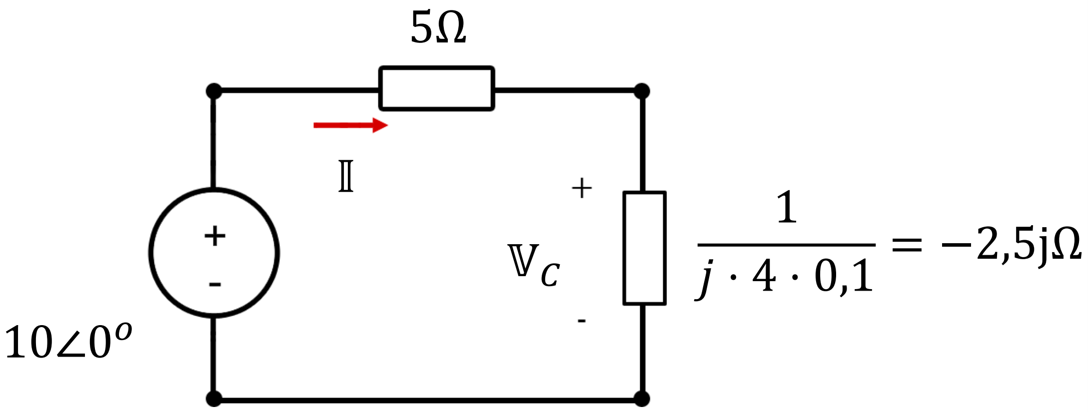


Respostas

$$\boldsymbol{v(t) = 4,47 \cdot cos(4 \cdot t - 63,43^{o})V}$$

Exercício





$$\mathbb{V}_C = \mathbb{V}_s \cdot \frac{Z_c}{Z_c + Z_R} = 10\angle 0^o \cdot \frac{-2{,}5j}{5 - 2{,}5j} = 10\angle 0^o \cdot \frac{2{,}5\angle -90^o}{5{,}59\angle -26{,}56^o}$$

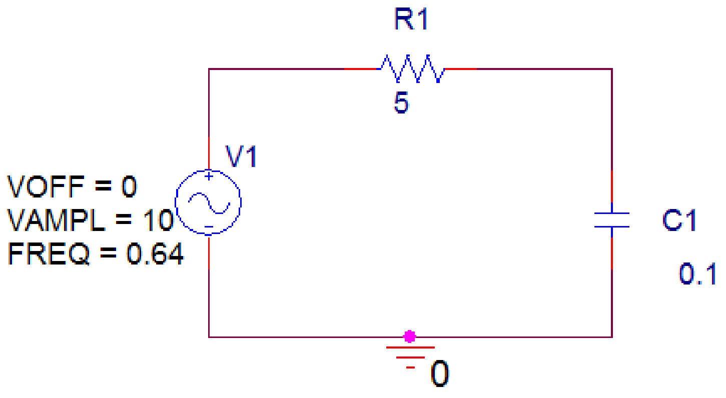
$$\mathbb{V}_C = 10 \cdot \frac{2{,}5}{5{,}59}\angle 0 + \left(-90 - (-26{,}56)\right)^o = 4{,}47\angle 63{,}44^o$$

$$\boldsymbol{\mathbb{V}_C = 4,47\angle -63,43^o\ V}$$

$$\boldsymbol{v(t) = 4,47 \cdot cos(4 \cdot t - 63,43^o\ )V} \qquad \boldsymbol{i(t) = 1,79 \cdot cos(4 \cdot t + 26,56^o\ )A}$$

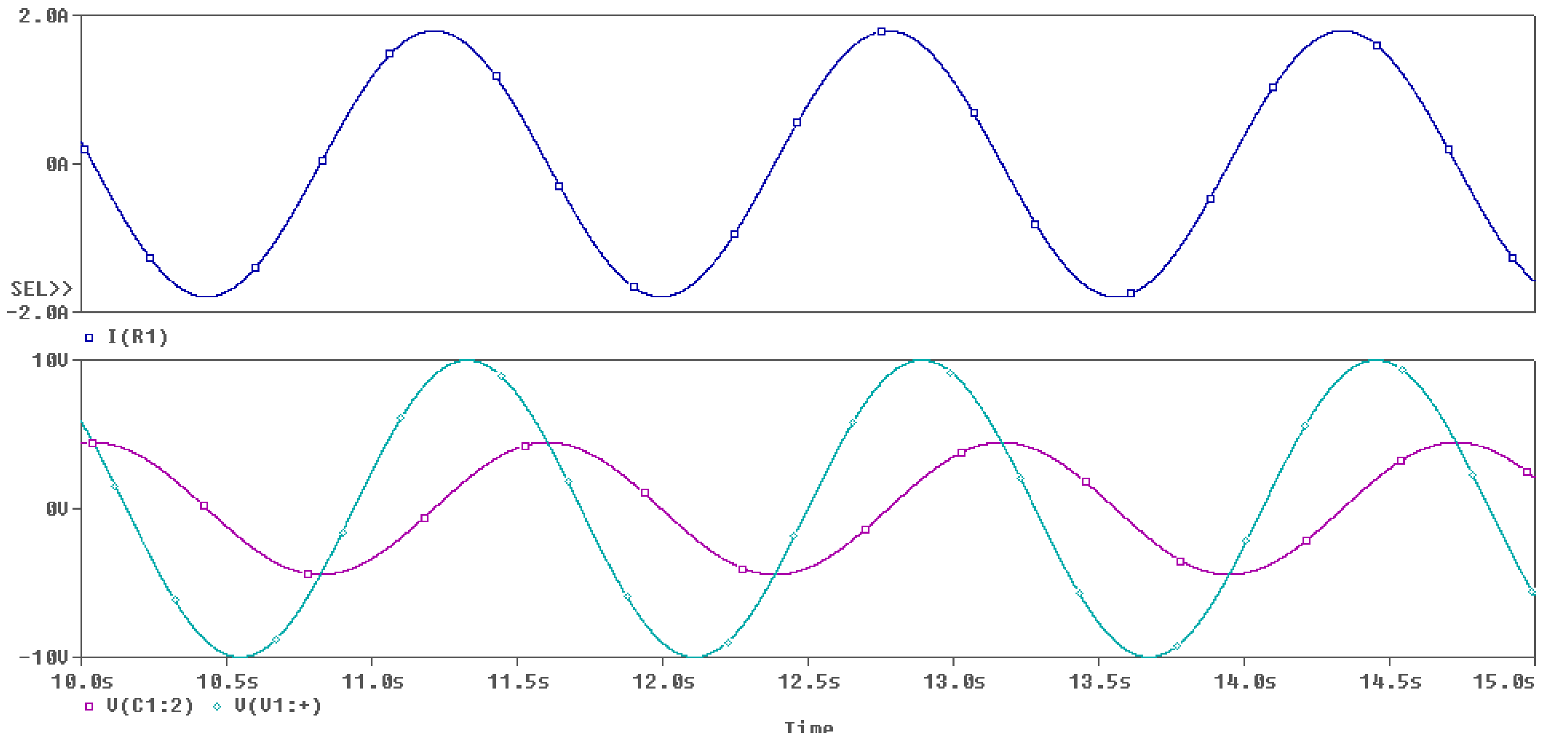
Exercício

$$i(t) = 1,79 \cdot cos(4 \cdot t + 26,56^o)A \qquad v(t) = 4,47 \cdot cos(4 \cdot t - 63,43^o)V$$



$$f = \frac{w}{2 \cdot \pi} = \frac{4}{2 \cdot \pi} = 0,64Hz$$

Corrente

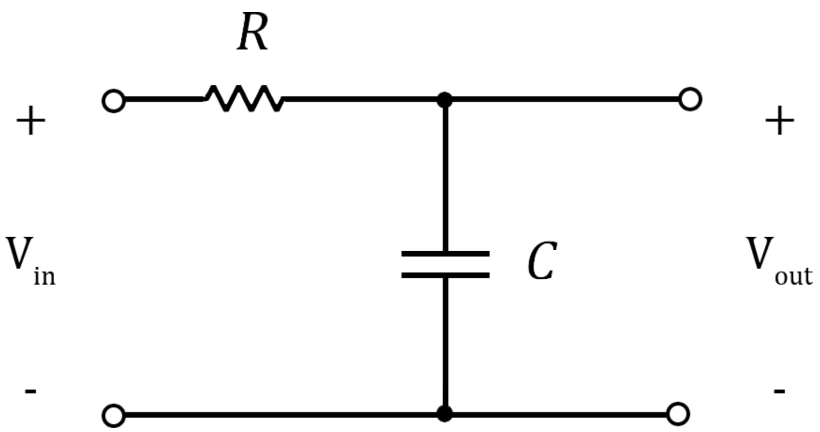


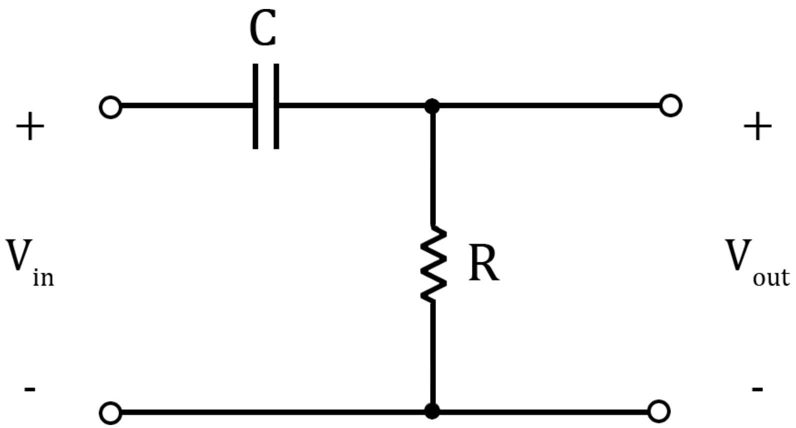
Tensão (fonte x capacitor)

Seletores de frequência (filtros passivos)

Exercício: Diferencie cada filtro abaixo, como passa altas ou passa baixas, encontre a função transferência e a frequência de corte.

$$H(\omega) = \frac{\mathbb{V}_{out}}{\mathbb{V}_{in}} \qquad |H(\omega_c)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$





Seletores de frequência (filtros passivos)

$$H(\omega) = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}}$$

$$H(\omega) = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{\frac{j\omega RC + 1}{j\omega C}}$$

$$H(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

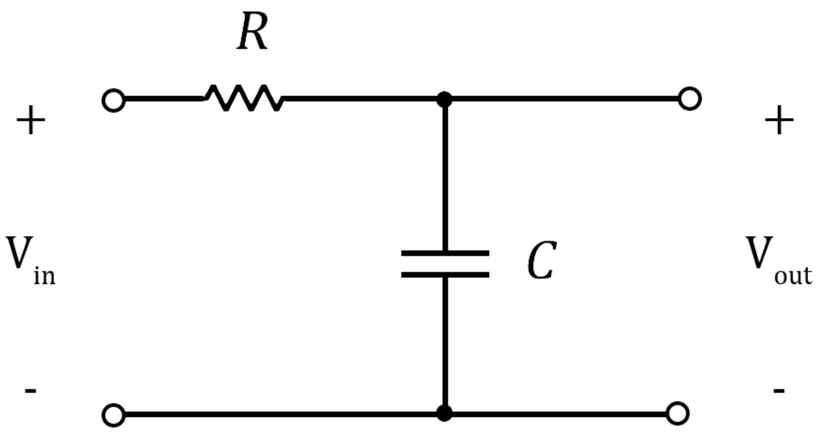
$$H(\omega) = H\angle\phi$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = H = |H(\omega_c)|$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega_c RC)^2}}$$

$$2 = 1 + (\omega_c RC)^2$$

$$\omega_c = \frac{1}{RC}$$



Passa baixas

$$\boldsymbol{\omega_c = \frac{1}{RC}}$$

Seletores de frequência (filtros passivos)

$$H(\omega) = \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}}$$

$$H(\omega) = \frac{1}{1 + \frac{1}{j\omega RC}}$$

$$H(\omega) = H\angle\phi$$

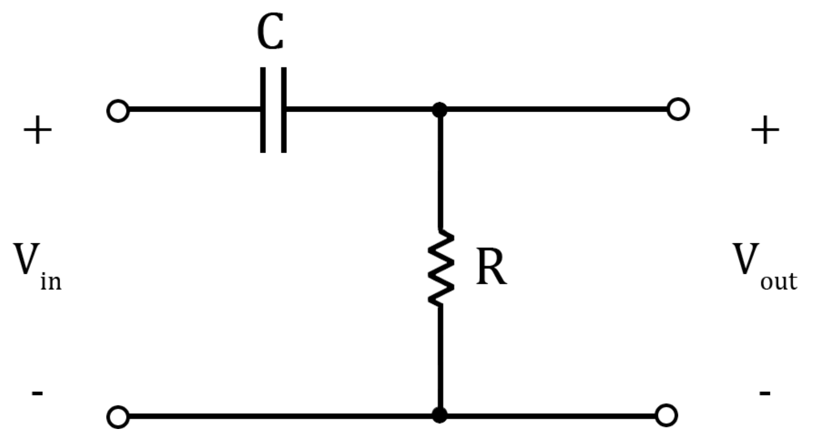
$$\frac{1}{\sqrt{2}} = H = |H(\omega_c)|$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{\omega_c RC}\right)^2}}$$

$$\sqrt{2} = \sqrt{1 + \left(\frac{1}{\omega_c RC}\right)^2}$$

$$2 = 1 + \left(\frac{1}{\omega_c RC}\right)^2$$

$$\omega_c = \frac{1}{RC}$$



Passa altas

$$\boldsymbol{\omega_c = \frac{1}{RC}}$$

Transformada de Laplace

Definição: Transformada de Laplace é uma transformação integral de uma função f(t) do domínio do tempo para o domínio da frequência complexa, fornecendo F(s).

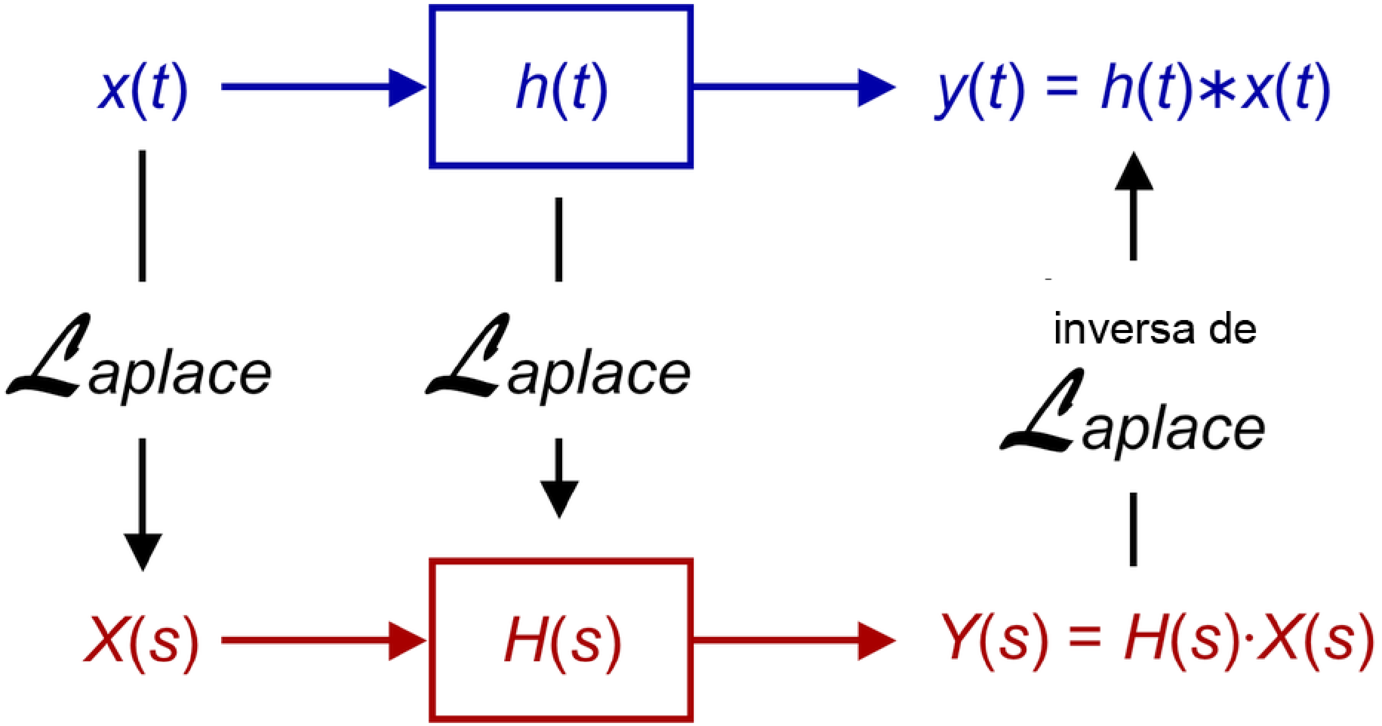
- Analisar circuitos com ampla gama de variedade de entradas e respostas.
- A transformada de Laplace transforma equações diferenciais em equações algébricas.
- Os pares de transformadas de Laplace, permitem a resolução de circuitos complexos no domínio da frequência e também o retorno ao domínio do tempo através da transformada inversa de Laplace
- Os parâmetros definidos no domínio da frequência são muito importantes para a análise do circuito no domínio do tempo.

Pierre Simon Laplace

Definida por:

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_{0^-}^{\infty} f(t) e^{-st} dt \quad onde \quad s = \sigma + j\omega$$

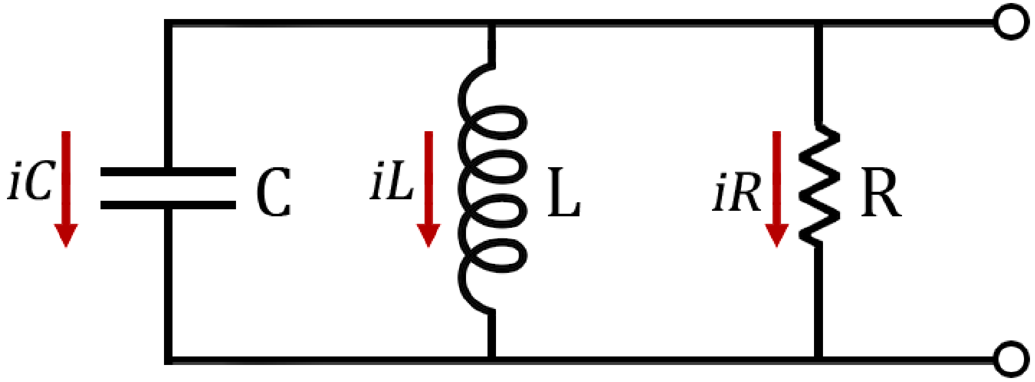
Domínio do tempo



Domínio da frequencia

Circuito de segunda ordem no tempo

Circuito RLC paralelo, análise no domínio do tempo (equações diferenciais)



Este exemplo analisa um circuito de segunda ordem diretamente no tempo. Ainda é necessário isolarmos a variável de interesse. Veremos futuramente este exemplo no domínio de Laplace

Somando as corrente:

$$\frac{v}{R} + \frac{1}{L}\int_0^t v d\tau + I_0 + C\frac{dv}{dt} = 0$$

Diferenciando em relação a t (I_0 constante)

$$\frac{1}{R}\frac{dv}{dt} + \frac{v}{L} + C\frac{d^2v}{dt^2} = 0$$

Reorganizando os coeficientes e arranjando as derivadas em ordem crescentes, chegamos a **EDO** de **segunda ordem** abaixo:

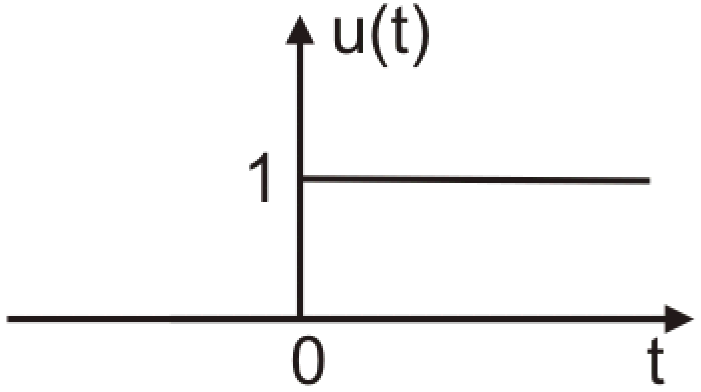
$$\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{1}{RC}\frac{dv}{dt} + \frac{v}{LC} = 0$$

Transformada de Laplace

Para obtermos a transformada de Laplace e a transformada inversa de Laplace, iremos comparar pares de transformada (Tabela de transformada). A seguir alguns exemplos da obtenção das transformadas.

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st}dt \quad onde \;\; s = \sigma + j\omega$$

Considere o degrau unitário:



$$f(t) = u(t) = \begin{cases} 1\, para\; t \geq 0 \\ 0\, para\; t < 0 \end{cases}$$

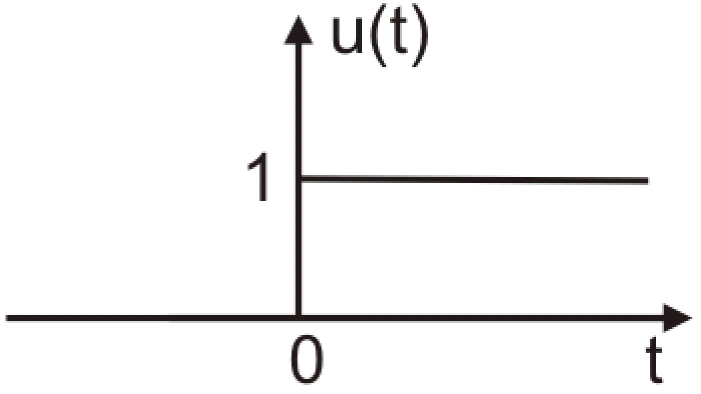
Transformada de Laplace

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

$$f(t) = u(t) = \begin{cases} 1\ para\ t \geq 0 \\ 0\ para\ t < 0 \end{cases}$$

$$F(s) = \int_{0^-}^{\infty} 1e^{-st}dt$$

$$F(s) = -\frac{e^{-st}}{s}\bigg|_{0^-}^{\infty} = 0 - \left(-\frac{1}{s}\right)$$



$$\boxed{\mathcal{L}[u(t)] = U(s) = \frac{1}{s}}$$

Transformada de Laplace

$$f(t) = e^{-\alpha t}$$

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_{0^-}^{\infty} e^{-\alpha t} \cdot e^{-st}dt = \int_{0^-}^{\infty} e^{(-s-\alpha)t}dt$$

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = -\left(\frac{1}{s+\alpha}\right)e^{-(s+\alpha)t}\Big|_{0^-}^{\infty} = 0 - \left(-\frac{1}{s+\alpha}\right)$$

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \frac{1}{s+\alpha}$$

Transformada de Laplace

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_{0^-}^{\infty} \frac{df(t)}{dt} \cdot e^{-st}dt$$

$$\mathcal{L}[f(t)] = e^{-st} \cdot f(t)\Big|_{0^-}^{\infty} + s\int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

$$\boxed{\mathcal{L}[f(t)] = sF(s) - f(0^-)}$$

$$\boxed{f(t) = \frac{df(t)}{dt}}$$

$$\left(\int udv = uv - \int vdu\right)$$

$$u = e^{-st} \rightarrow du = -s \cdot e^{-st}dt$$

$$dv = \frac{df(t)}{dt}dt \rightarrow v = f(t)$$

Transformada de Laplace

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_{0^-}^{\infty} \left[\int_0^t f(t)dt\right] \cdot e^{-st}dt$$

$$\mathcal{L}[f(t)] = \left[\int_0^t f(x)dx\right]\left(-\frac{e^{-st}}{s}\right)\Bigg|_{0^-}^{\infty} - \int_{0^-}^{\infty} \frac{e^{-st}}{s} f(t)dt$$

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{s}F(s)$$

$$\boxed{f(t) = \int_0^t f(x)dx}$$

$$\left(\int udv = uv - \int vdu\right)$$

$$u = \int_0^t f(x)dx \rightarrow du = f(t)dt$$

$$dv = e^{-st}dt \rightarrow v = -\frac{1}{s}e^{-st}$$

Propriedades da Transformada de Laplace

Fator de escala

$$F\big(k \cdot f(t)\big) = k \cdot F(s)$$

Linearidade

$$F\big(f_1(t) + f_2(t) + f_3(t)\big) = F_1(s) + F_2(s) + F_3(s)$$

Deslocamento no tempo

$$F(f(t - \alpha)) = e^{-\alpha s} \cdot F(s)$$

Deslocamento na frequência

$$F\big(e^{\alpha t} \cdot f(t)\big) = F(s - \alpha)$$

Elementos de circuito (Tempo, Laplace, fasor)

Resistor

$$v = R \cdot i$$

$$i = \frac{v}{R}$$

$$V(s) = \mathrm{R} \cdot I(s)$$

$$I(s) = \frac{V(s)}{R}$$

$$\frac{V(s)}{I(s)} = Z_R(s) = R$$

$$\frac{V(s)}{I(s)} = Z_R(j\omega) = R$$

Indutor

$$v(t) = L \cdot \frac{di}{dt}$$

$$i(t) = \frac{1}{L}\int_0^t v(\tau)d\tau + i(0)$$

$$V(s) = s \cdot L \cdot I(s) - L \cdot I_0$$

$$I(s) = \frac{V(s)}{L \cdot s} + \frac{I_0}{s}$$

$$\frac{V(s)}{I(s)} = Z_L(s) = sL$$

$$\frac{V(j\omega)}{I(j\omega)} = Z_L(j\omega) = j\omega L$$

Capacitor

$$v(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)d\tau + v(0)$$

$$i(t) = C\frac{dv}{dt}$$

$$V(s) = \frac{I(s)}{C \cdot s} + \frac{V_0}{s}$$

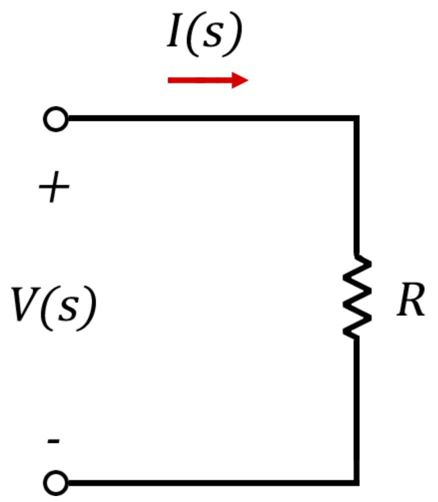
$$I(s) = s \cdot C \cdot V(s) - C \cdot V_0$$

$$\frac{V(s)}{I(s)} = Z_C(s) = \frac{1}{sC}$$

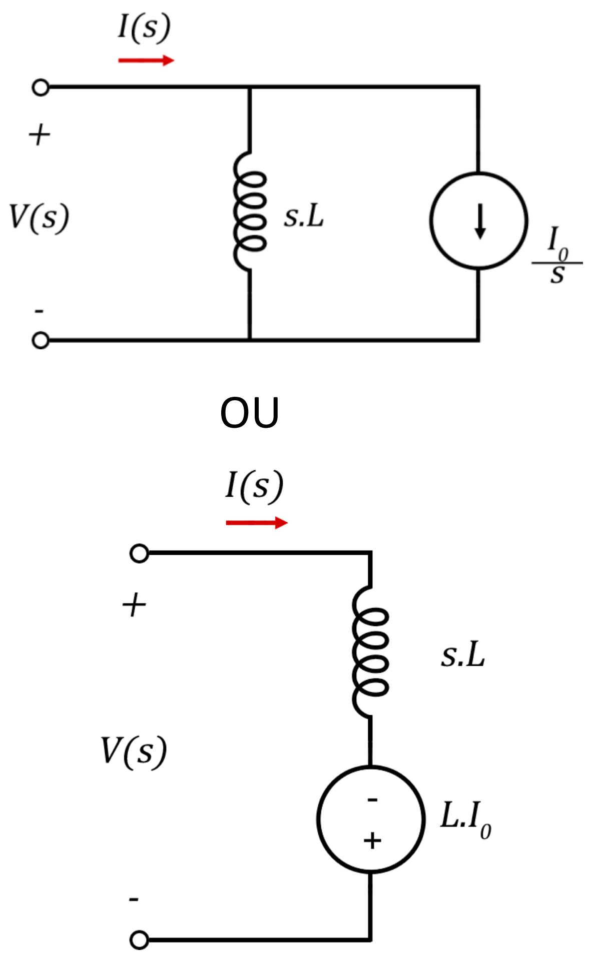
$$\frac{V(j\omega)}{I(j\omega)} = Z_C(j\omega) = \frac{1}{j\omega C}$$

Elementos de circuito Laplace

Resistor



Indutor



Capacitor

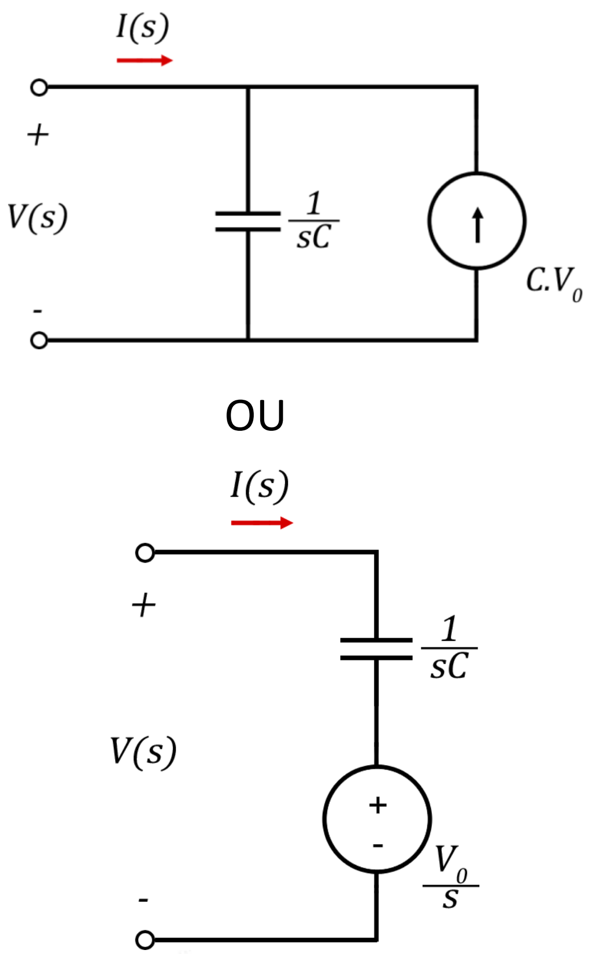


Tabela de Laplace

TABLE 15.1 Properties of the Laplace transform.

Property	$f(t)$	$F(s)$
Linearity	$a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)$	$a_1 F_1(s) + a_2 F_2(s)$
Scaling	$f(at)$	$\frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$
Time shift	$f(t-a)u(t-a)$	$e^{-as} F(s)$
Frequency shift	$e^{-at} f(t)$	$F(s+a)$
Time differentiation	$\frac{df}{dt}$	$sF(s) - f(0^-)$
	$\frac{d^2 f}{dt^2}$	$s^2 F(s) - sf(0^-) - f'(0^-)$
	$\frac{d^3 f}{dt^3}$	$s^3 F(s) - s^2 f(0^-) - sf'(0^-) - f''(0^-)$
	$\frac{d^n f}{dt^n}$	$s^n F(s) - s^{n-1} f(0^-) - s^{n-2} f'(0^-) - \cdots - f^{(n-1)}(0^-)$
Time integration	$\int_0^t f(t)\,dt$	$\frac{1}{s} F(s)$
Frequency differentiation	$tf(t)$	$-\frac{d}{ds} F(s)$
Frequency integration	$\frac{f(t)}{t}$	$\int_s^{\infty} F(s)\,ds$
Time periodicity	$f(t) = f(t+nT)$	$\frac{F_1(s)}{1 - e^{-sT}}$
Initial value	$f(0^+)$	$\lim_{s\to\infty} sF(s)$
Final value	$f(\infty)$	$\lim_{s\to 0} sF(s)$
Convolution	$f_1(t) * f_1(t)$	$F_1(s)F_2(s)$

TABLE 15.2 Laplace transform pairs.

$f(t)$	$F(s)$
$\delta(t)$	1
$u(t)$	$\frac{1}{s}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
t	$\frac{1}{s^2}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$
$t^n e^{-at}$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$\sin(\omega t + \theta)$	$\frac{s \sin\theta + \omega \cos\theta}{s^2+\omega^2}$
$\cos(\omega t + \theta)$	$\frac{s \cos\theta - \omega \sin\theta}{s^2+\omega^2}$
$e^{-at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$
$e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$

Pares de transformada

$$u(t) = \xleftrightarrow{\mathscr{L} / \mathscr{L}^{-1}} U(s)$$

$$r(t) = \xleftrightarrow{\mathscr{L} / \mathscr{L}^{-1}} R(s)$$

$$f(t) = \xleftrightarrow{\mathscr{L} / \mathscr{L}^{-1}} F(s)$$

$$g(t) = \xleftrightarrow{\mathscr{L} / \mathscr{L}^{-1}} G(s)$$

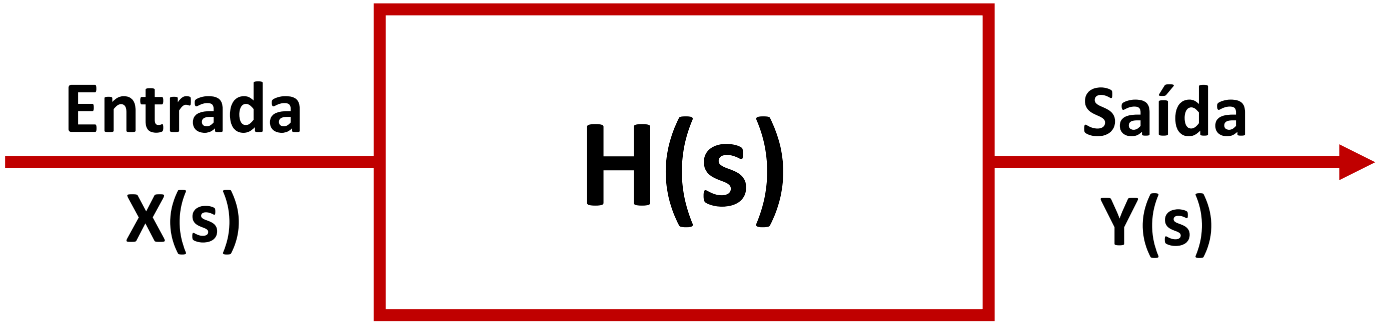
$$r(t) = \xleftrightarrow{\mathscr{L} / \mathscr{L}^{-1}} R(s)$$

$$tempo \rightarrow minúsculo$$
$$frequencia \rightarrow maiúsculo$$

Revisão - Função Transferência

Função transferência H(s) é a razão entre a resposta de saída Y(s) e a excitação de entrada X(s), suponde que as condições iniciais sejam iguais a zero

$$\boxed{H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}}$$



Sistema Linear

Função Transferência

Obtendo a função transferência é possível modelar a saída do sistema em relação a excitação de entrada

$$H(s) = \ Ganho\ de\ tensão = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} \quad \rightarrow \quad V_o = H(s) \cdot V_i$$

$$H(s) = \ Ganho\ de\ corrente = \frac{I_o(s)}{I_i(s)} \rightarrow \quad I_o = H(s) \cdot I_i$$

Domínio do tempo (convolução)

$$y(t) = h(t) * x(t)$$

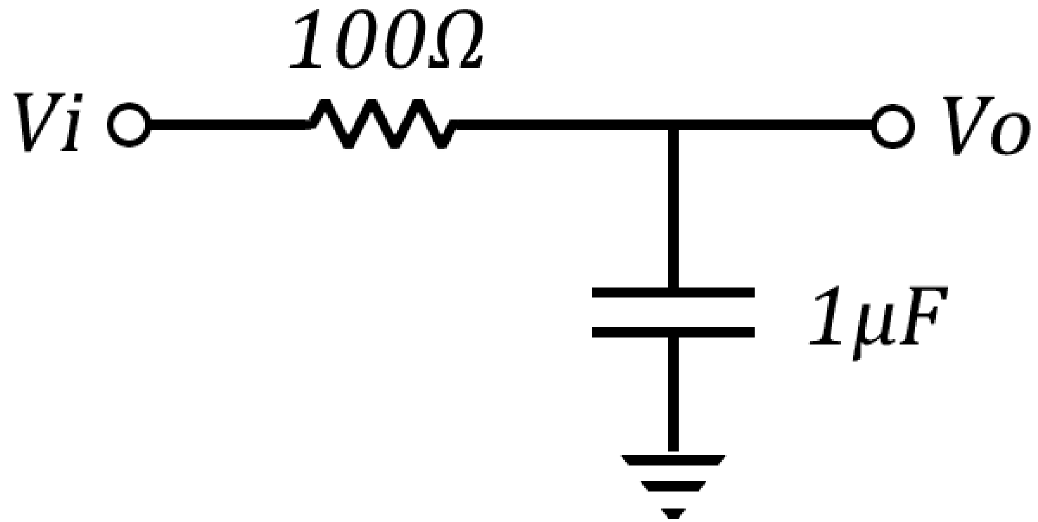
$$y(t) = \int_0^t x(\lambda) \cdot h(t - \lambda) d\lambda$$

Domínio da frequência (multiplicação)

$$Y(s) = H(s) \cdot X(s)$$

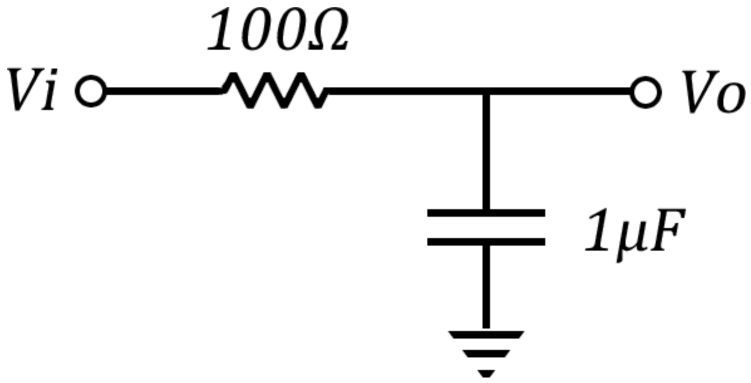
Exemplo

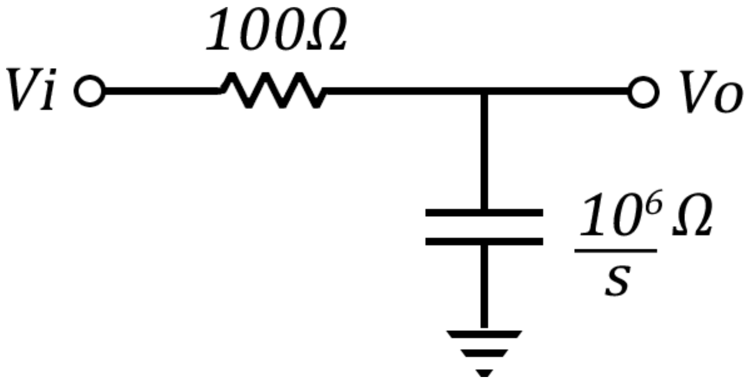
Exemplo: Calcule a função transferência do circuito abaixo.



$$Resposta: \ H(s) = \frac{10^4}{s + 10^4}$$

Exemplo: Calcule a função transferência do circuito abaixo.





$$V_o(s) = H(s) \cdot V_i(s)$$

$$V_o(s) = \frac{\frac{10^6}{s}}{\frac{10^6}{s} + 100} \cdot V_i(s)$$

$$H(s) = \frac{10^6}{10^6 + 100 \cdot s}$$

$$H(s) = \frac{10^4}{s + 10^4}$$

Função Transferência

Parâmetros de uma função transferência:

- $m = grau\ do\ numerador$
- $n = grau\ do\ denominador$
- $a_i\ e\ b_i\ \rightarrow corficientes$
- $Sistemas\ realizáveis$
  - $m \leq n$

- $z_i\ raízes\ do\ numerador$
  - ***Zeros da F.T.***
- $p_i\ raízes\ do\ denominador$
  - ***Polos da F.T***

Forma Polinomial

$$H(s) = k \cdot \frac{s^m + a_{m-1} \cdot s^{m-1} + \cdots + a_1 \cdot s + a_0}{s^n + b_{n-1} \cdot s^{n-1} + \cdots + b_1 \cdot s + b_0}$$

Forma Fatorada

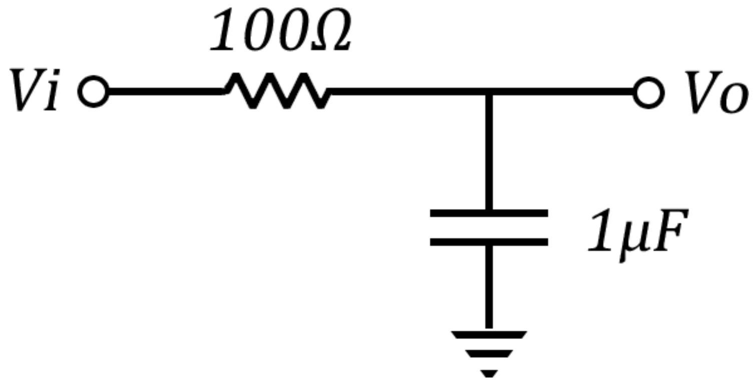
$$H(s) = k \cdot \frac{(s - z_1)(s - z_2) \ldots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_1) \ldots (s - p_{m)}}$$

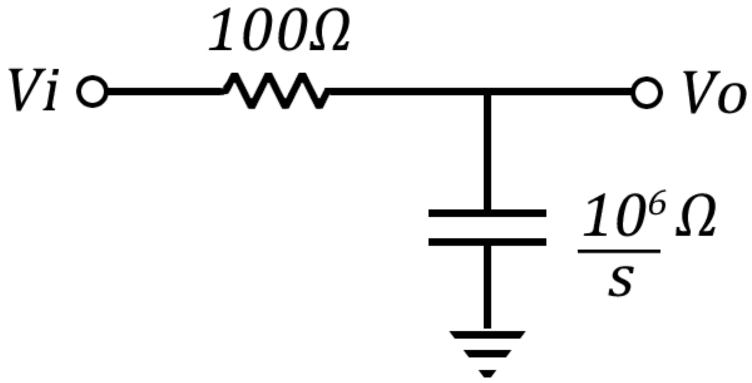
Função Transferência

O exemplo resolvido anteriormente possui:

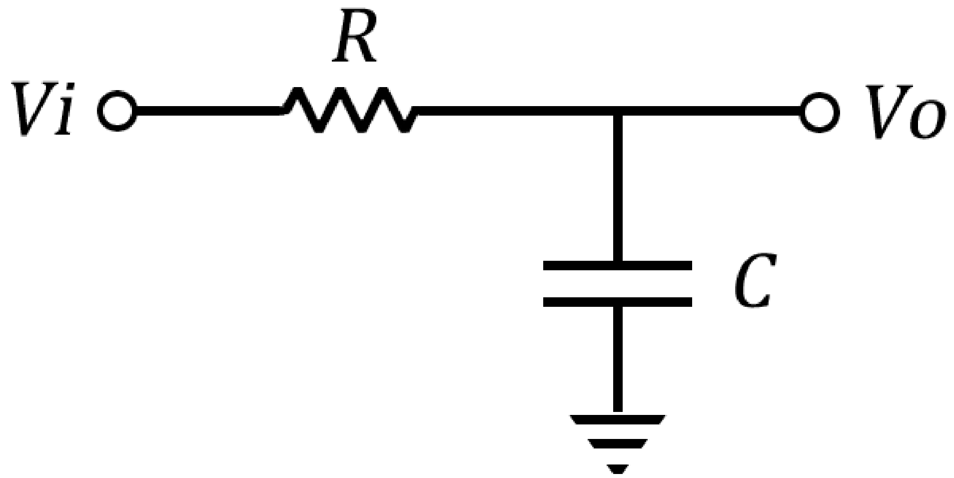
$$H(s) = \frac{10^4}{s + 10^4}$$

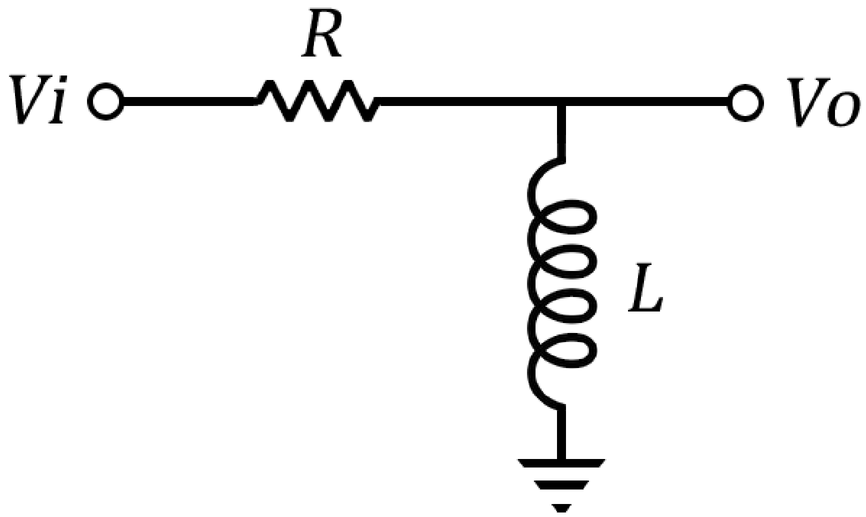
- $Nenhum\ zero$
- $Um\ (1)\ Polo\ em\ -10^4\ (p_1 = -10^4)$





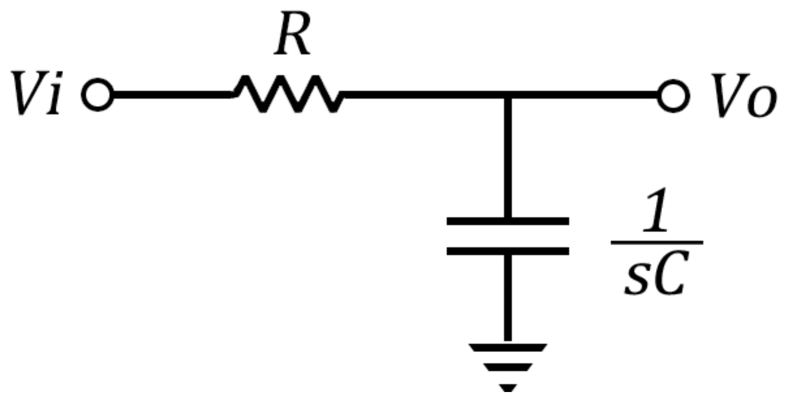
Exemplo: Encontre os zeros e polos dos circuitos

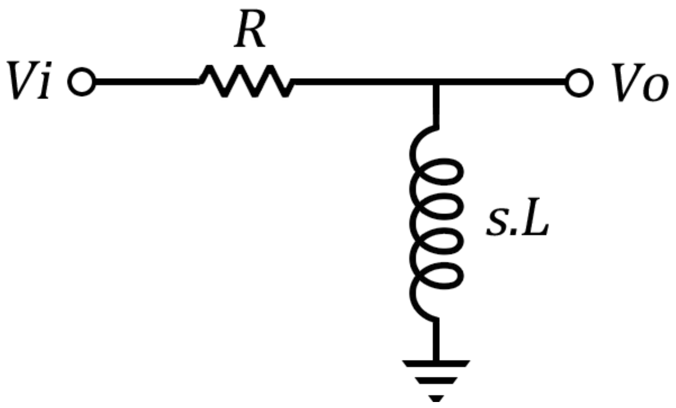




Exemplo

Exemplo: Encontre os zeros e polos dos circuitos





$$H(s) = \frac{\frac{1}{sC}}{R + \frac{1}{sC}} = \frac{1}{sRC + 1} = \frac{\frac{1}{RC}}{s + \frac{1}{RC}}$$

$$\boldsymbol{sem\ zeros}$$

$$\boldsymbol{p_1 = -\frac{1}{RC}}$$

$$H(s) = \frac{sL}{R + sL} = \frac{s}{s + \frac{R}{L}}$$

$$\boldsymbol{z_1 = 0}$$

$$\boldsymbol{p_1 = -\frac{R}{L}}$$

Exemplo

Exemplo: Calcule Vo(s) caso a entrada seja um degrau unitário. Encontre vo(t) através da Transformada Inversa de Laplace

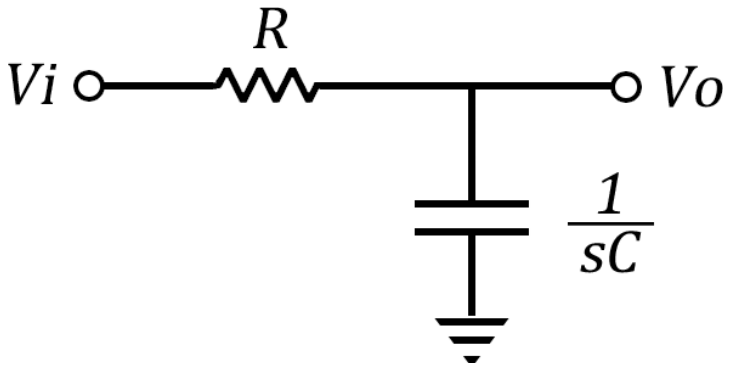


TABLE 15.2 Laplace transform pairs.

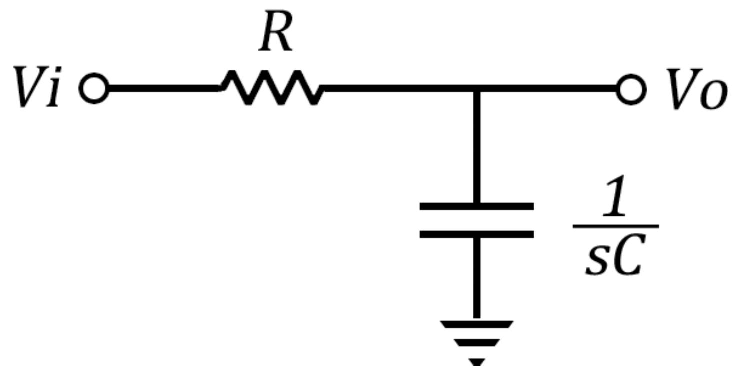
$f(t)$	$F(s)$
$\delta(t)$	1
$u(t)$	$\frac{1}{s}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$

$$H(s) = \frac{\frac{1}{RC}}{s + \frac{1}{RC}}$$

$$V_o(s) = H(s) \cdot V_i(s)$$

Exemplo

Exemplo: Calcule Vo(s) caso a entrada seja um degrau unitário. Encontre vo(t) através da Transformada Inversa de Laplace



$$H(s) = \frac{\frac{1}{RC}}{s + \frac{1}{RC}}$$

$$V_o(s) = H(s) \cdot V_i(s)$$

$$u(t) = 1$$

$$F\big(u(t)\big) = \frac{1}{s} = V_i(s)$$

$$V_o(s) = \frac{\frac{1}{RC}}{s\left(s + \frac{1}{RC}\right)}$$

Exemplo

Exemplo: Calcule Vo(s) caso a entrada seja um degrau unitário. Encontre vo(t) através da Transformada Inversa de Laplace

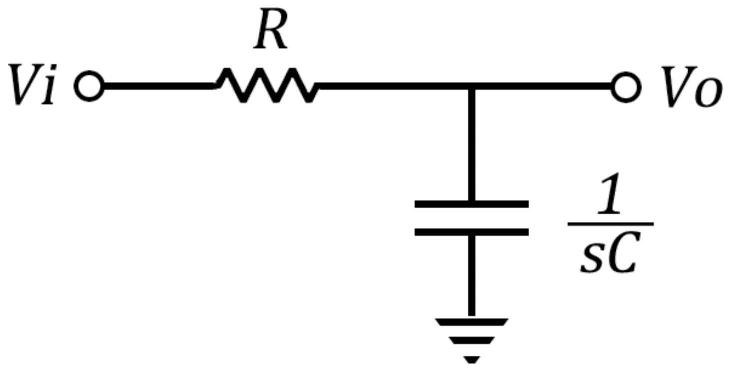


TABLE 15.2 Laplace transform pairs.

$f(t)$	$F(s)$
$\delta(t)$	1
$u(t)$	$\frac{1}{s}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$

$$V_o(s) = \frac{\frac{1}{RC}}{s\left(s+\frac{1}{RC}\right)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+\frac{1}{RC}} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{expansão\ em\ frações\ parciais}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s+\frac{1}{RC}}\right] = v_o(t) = 1 - e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$v_c(t) = v_s\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \quad se \ \ v_s = 1$$

$$v_c(t) = 1 - e^{-\frac{t}{RC}} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{confere}$$