Aula 12

Transformada de Laplace II

Matérias que serão discutidas
Nilsson – Circuitos Elétricos
Capítulos 12, 13 e 14 – LAPLACE
Capítulo 8 – Circuitos de Segunda ordem no domínio do tempo

Circuitos Elétricos II

Prof. Henrique Amorim - UNIFESP - ICT

Revisão

A transformada de Laplace é uma ferramenta que auxilia a análise e interpretação de circuitos elétricos

Definida por:

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st}dt \quad onde \quad s = \sigma + j\omega$$

Algumas propriedades:

$$F\big(k \cdot f(t)\big) = k \cdot F\big(f(t)\big)$$

$$F(f_1(t) + f_2(t) + f_3(t)) = F(f_1(t)) + F(f_2(t)) + F(f_3(t))$$

$$F\left(\frac{d}{dt}f(t)\right) = sF(s) - f(0^-)$$

$$F\left(\int_0^t f(t)\right) = \frac{F(s)}{s}$$

Revisão - Elementos de circuito (Tempo, Laplace, fasor)

Resistor

$$v = R \cdot i$$

$$i = \frac{v}{R}$$

$$V(s) = \mathrm{R} \cdot I(s)$$

$$I(s) = \frac{V(s)}{R}$$

$$\frac{V(s)}{I(s)} = Z_R(s) = R$$

$$\frac{V(s)}{I(s)} = Z_R(j\omega) = R$$

Indutor

$$v(t) = L \cdot \frac{di}{dt}$$

$$i(t) = \frac{1}{L}\int_0^t v(\tau)d\tau + i(0)$$

$$V(s) = s \cdot L \cdot I(s) - L \cdot I_0$$

$$I(s) = \frac{V(s)}{L \cdot s} + \frac{I_0}{s}$$

$$\frac{V(s)}{I(s)} = Z_L(s) = sL$$

$$\frac{V(j\omega)}{I(j\omega)} = Z_L(j\omega) = j\omega L$$

Capacitor

$$v(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)d\tau + v(0)$$

$$i(t) = C\frac{dv}{dt}$$

$$V(s) = \frac{I(s)}{C \cdot s} + \frac{V_0}{s}$$

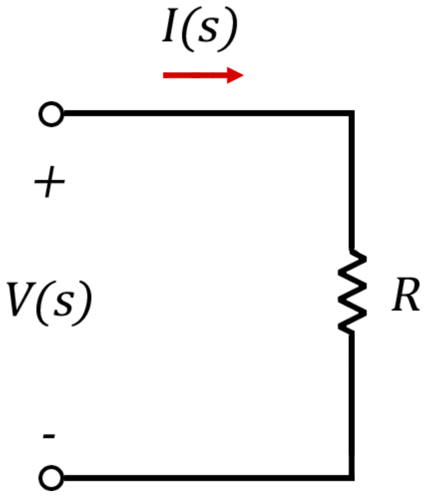
$$I(s) = s \cdot C \cdot V(s) - C \cdot V_0$$

$$\frac{V(s)}{I(s)} = Z_C(s) = \frac{1}{sC}$$

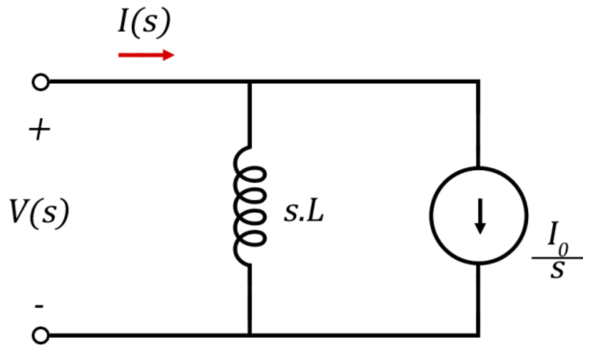
$$\frac{V(j\omega)}{I(j\omega)} = Z_C(j\omega) = \frac{1}{j\omega C}$$

Revisão - Elementos de circuito Laplace

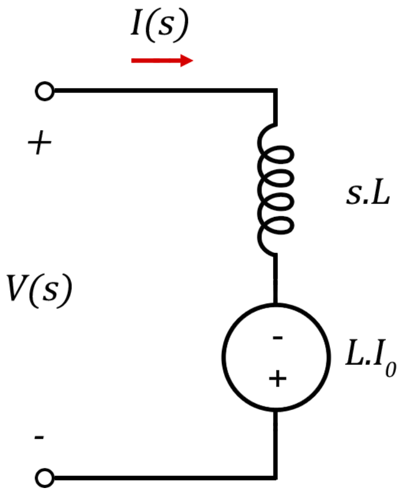
Resistor



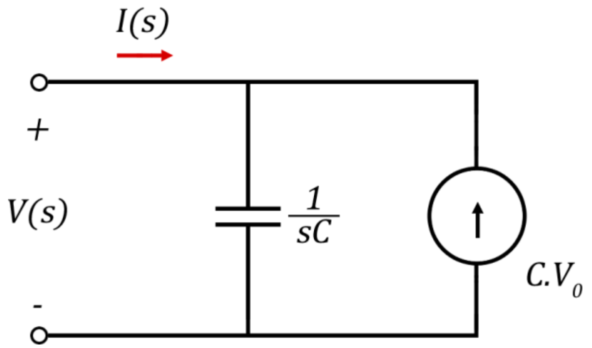
Indutor



OU



Capacitor



OU

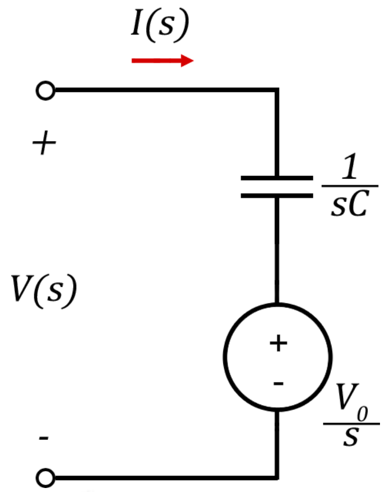


Tabela de Laplace

TABLE 15.1 Properties of the Laplace transform.

Property	$f(t)$	$F(s)$
Linearity	$a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)$	$a_1 F_1(s) + a_2 F_2(s)$
Scaling	$f(at)$	$\frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$
Time shift	$f(t-a)u(t-a)$	$e^{-as} F(s)$
Frequency shift	$e^{-at} f(t)$	$F(s+a)$
Time differentiation	$\frac{df}{dt}$	$sF(s) - f(0^-)$
	$\frac{d^2 f}{dt^2}$	$s^2 F(s) - sf(0^-) - f'(0^-)$
	$\frac{d^3 f}{dt^3}$	$s^3 F(s) - s^2 f(0^-) - sf'(0^-) - f''(0^-)$
	$\frac{d^n f}{dt^n}$	$s^n F(s) - s^{n-1} f(0^-) - s^{n-2} f'(0^-) - \cdots - f^{(n-1)}(0^-)$
Time integration	$\int_0^t f(t)\,dt$	$\frac{1}{s} F(s)$
Frequency differentiation	$tf(t)$	$-\frac{d}{ds} F(s)$
Frequency integration	$\frac{f(t)}{t}$	$\int_s^\infty F(s)\,ds$
Time periodicity	$f(t) = f(t+nT)$	$\frac{F_1(s)}{1-e^{-sT}}$
Initial value	$f(0^+)$	$\lim_{s\to\infty} sF(s)$
Final value	$f(\infty)$	$\lim_{s\to 0} sF(s)$
Convolution	$f_1(t) * f_1(t)$	$F_1(s)F_2(s)$

TABLE 15.2 Laplace transform pairs.

$f(t)$	$F(s)$
$\delta(t)$	1
$u(t)$	$\frac{1}{s}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
t	$\frac{1}{s^2}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$
$t^n e^{-at}$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$\sin(\omega t + \theta)$	$\frac{s \sin\theta + \omega\cos\theta}{s^2+\omega^2}$
$\cos(\omega t + \theta)$	$\frac{s \cos\theta - \omega\sin\theta}{s^2+\omega^2}$
$e^{-at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$
$e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$

Pares de transformada

$$u(t) = \xleftrightarrow{\mathscr{L}/\mathscr{L}^{-1}} U(s)$$

$$r(t) = \xleftrightarrow{\mathscr{L}/\mathscr{L}^{-1}} R(s)$$

$$f(t) = \xleftrightarrow{\mathscr{L}/\mathscr{L}^{-1}} F(s)$$

$$g(t) = \xleftrightarrow{\mathscr{L}/\mathscr{L}^{-1}} G(s)$$

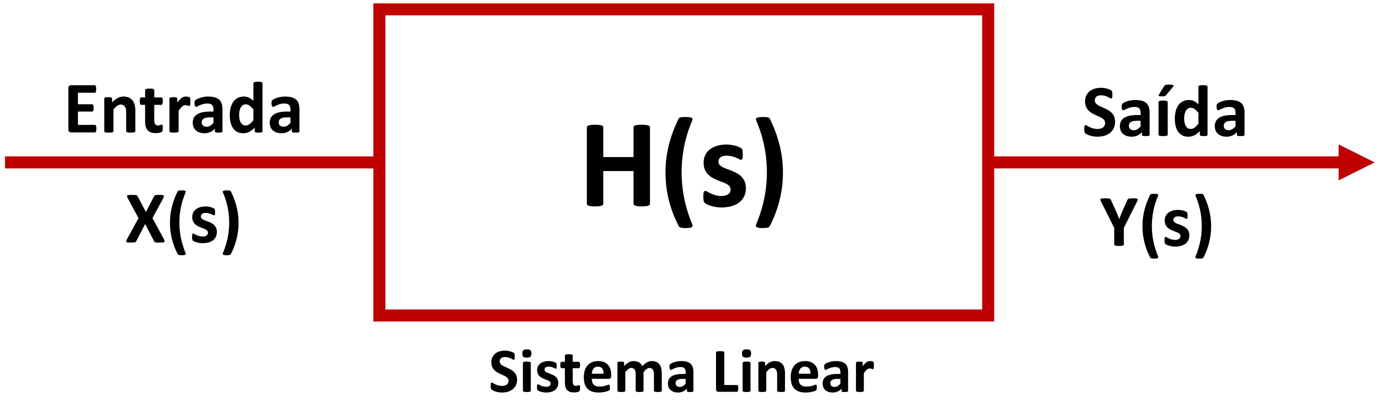
$$r(t) = \xleftrightarrow{\mathscr{L}/\mathscr{L}^{-1}} R(s)$$

$$tempo \to minúsculo$$
$$frequencia \to maiúsculo$$

Revisão - Função Transferência

Função transferência H(s) é a razão entre a resposta de saída Y(s) e a excitação de entrada X(s), suponde que as condições iniciais sejam iguais a zero

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$



Função Transferência

Obtendo a função transferência é possível modelar a saída do sistema em relação a excitação de entrada

$$H(s) = \ Ganho\ de\ tensão = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} \quad \rightarrow \quad V_o = H(s) \cdot V_i$$

$$H(s) = \ Ganho\ de\ corrente = \frac{I_o(s)}{I_i(s)} \rightarrow \quad I_o = H(s) \cdot I_i$$

Domínio do tempo (convolução)

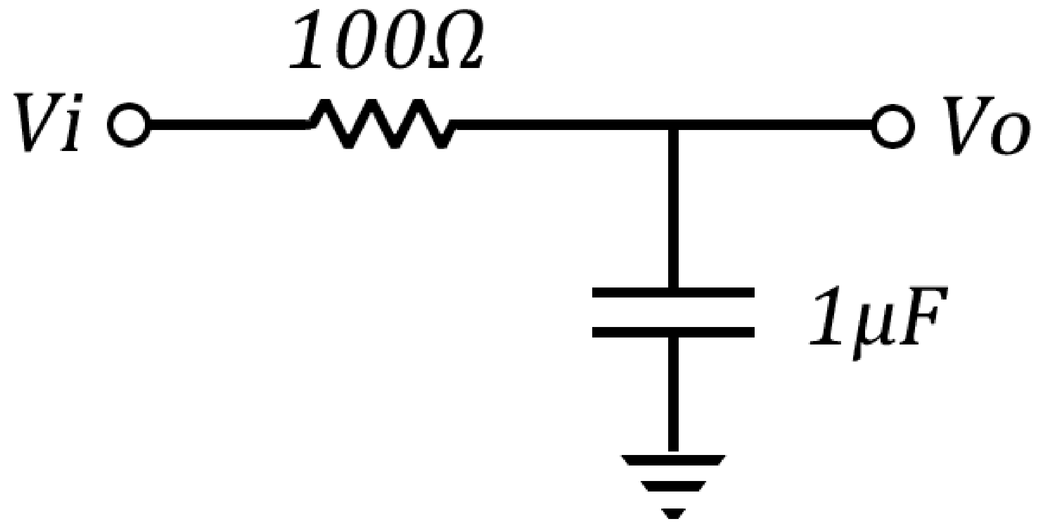
$$y(t) = h(t) * x(t)$$

$$y(t) = \int_0^t x(\lambda) \cdot h(t-\lambda) d\lambda$$

Domínio da frequência (multiplicação)

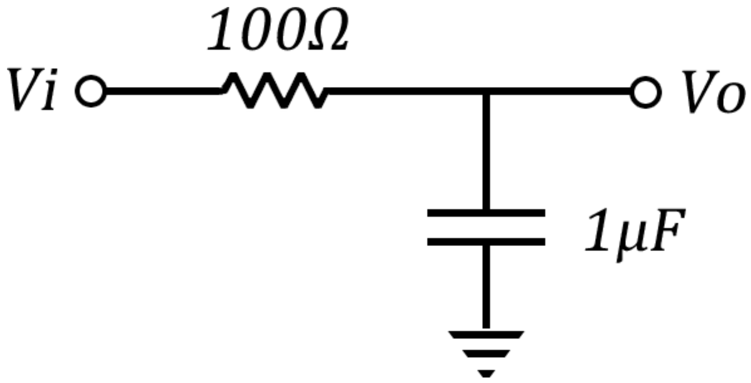
$$Y(s) = H(s) \cdot X(s)$$

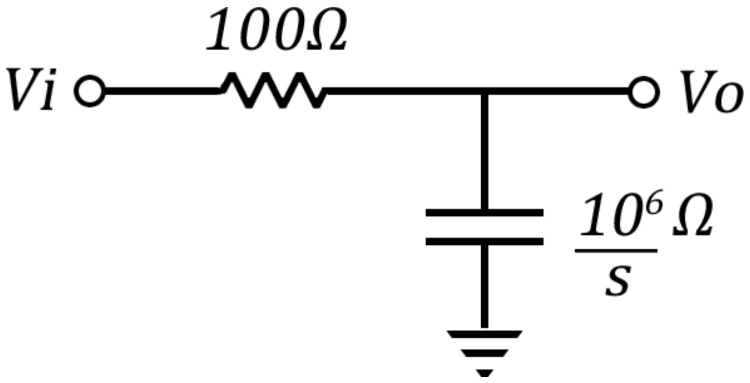
Exemplo: Calcule a função transferência do circuito abaixo.



$$Resposta:\ H(s) = \frac{10^4}{s + 10^4}$$

Exemplo: Calcule a função transferência do circuito abaixo.





$$V_o(s) = H(s) \cdot V_i(s)$$

$$V_o(s) = \frac{\frac{10^6}{s}}{\frac{10^6}{s} + 100} \cdot V_i(s)$$

$$H(s) = \frac{10^6}{10^6 + 100 \cdot s}$$

$$H(s) = \frac{10^4}{s + 10^4}$$

Função Transferência

Parâmetros de uma função transferência:

- $m = grau\ do\ numerador$
- $n = grau\ do\ denominador$
- $a_i\ e\ b_i\ \rightarrow corficientes$
- $Sistemas\ realizáveis$
  - $m \leq n$

Forma Polinomial

$$H(s) = k \cdot \frac{s^m + a_{m-1} \cdot s^{m-1} + \cdots + a_1 \cdot s + a_0}{s^n + b_{n-1} \cdot s^{n-1} + \cdots + b_1 \cdot s + b_0}$$

- $z_i\ raízes\ do\ numerador$
  - ***Zeros da F.T.***
- $p_i\ raízes\ do\ denominador$
  - ***Polos da F.T***

Forma Fatorada

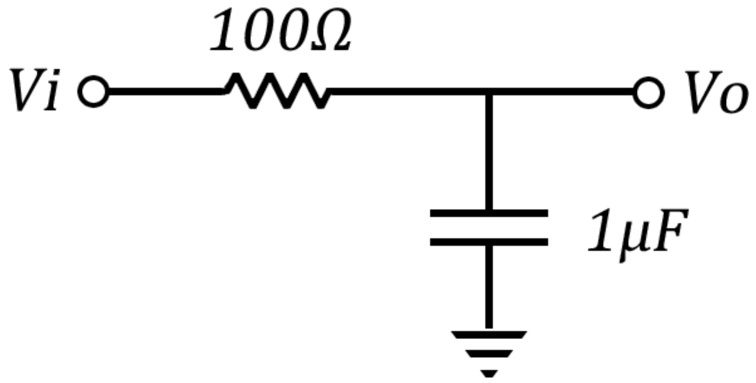
$$H(s) = k \cdot \frac{(s - z_1)(s - z_2) \ldots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_1) \ldots (s - p_{m)}}$$

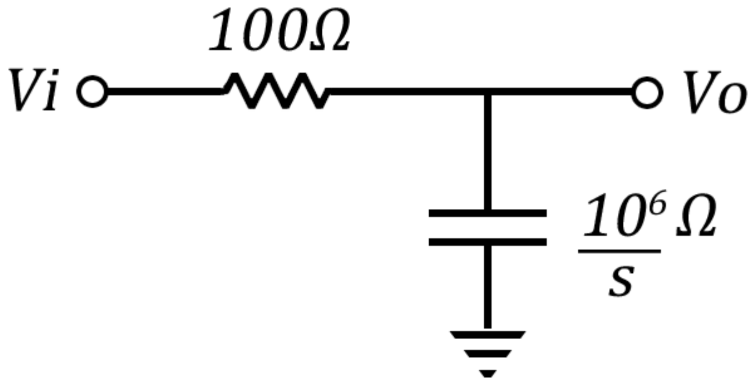
Função Transferência

O exemplo resolvido anteriormente possui:

$$H(s) = \frac{10^4}{s + 10^4}$$

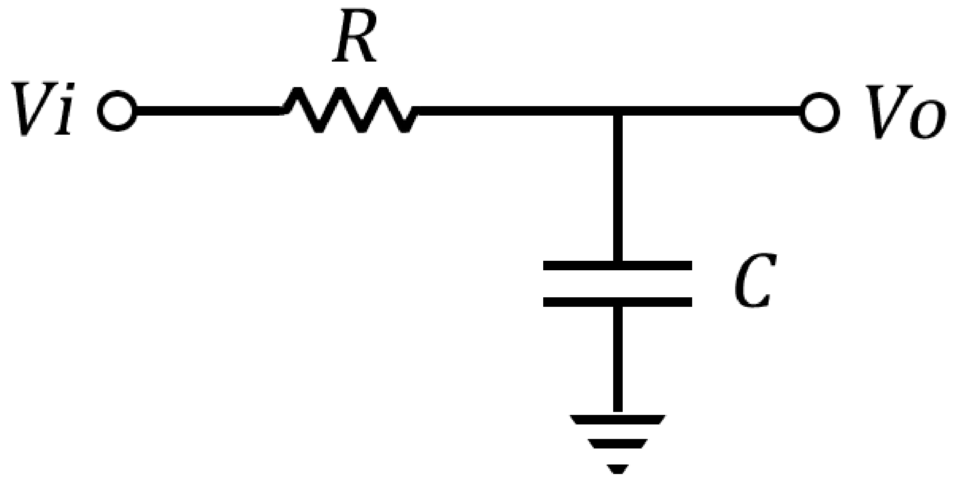
- $Nenhum\ zero$
- $Um\ (1)\ Polo\ em\ -10^4\ (p_1 = -10^4)$

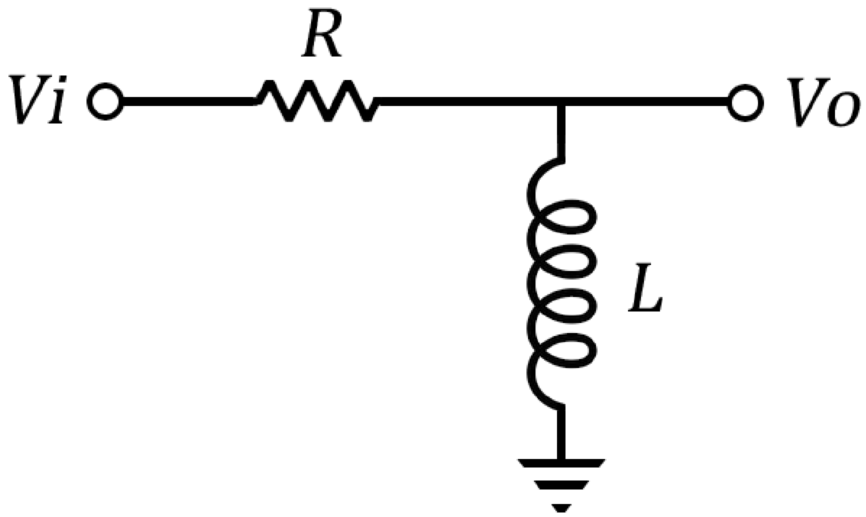




Exemplo

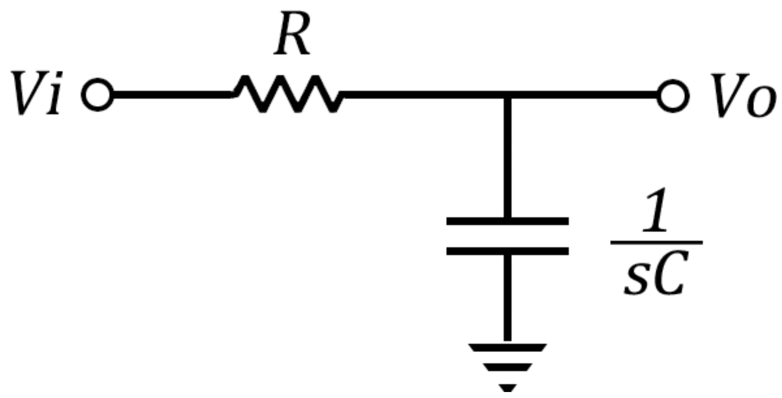
Exemplo: Encontre os zeros e polos dos circuitos

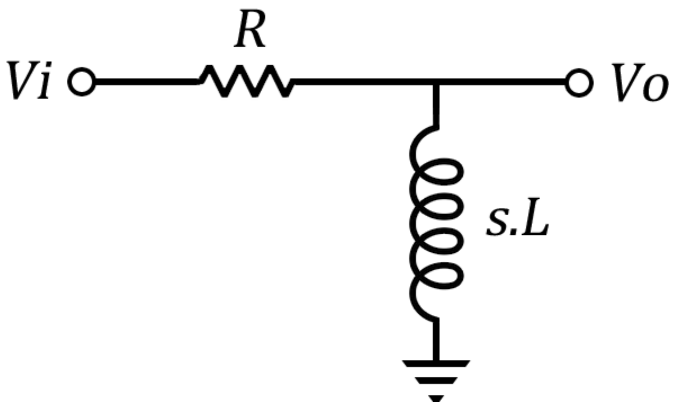




Exemplo

Exemplo: Encontre os zeros e polos dos circuitos





$$H(s) = \frac{\frac{1}{sC}}{R + \frac{1}{sC}} = \frac{1}{sRC + 1} = \frac{\frac{1}{RC}}{s + \frac{1}{RC}}$$

$$\boldsymbol{sem\ zeros}$$

$$\boldsymbol{p_1 = -\frac{1}{RC}}$$

$$H(s) = \frac{sL}{R + sL} = \frac{s}{s + \frac{R}{L}}$$

$$\boldsymbol{z_1 = 0}$$

$$\boldsymbol{p_1 = -\frac{R}{L}}$$

Exemplo

Exemplo: Calcule Vo(s) caso a entrada seja um degrau unitário. Encontre vo(t) através da Transformada Inversa de Laplace

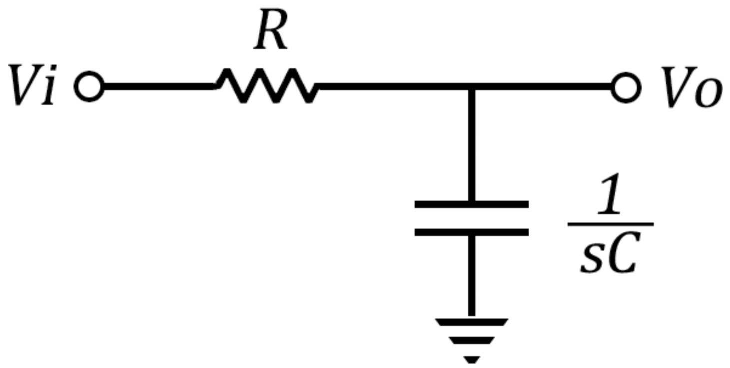


TABLE 15.2 Laplace transform pairs.

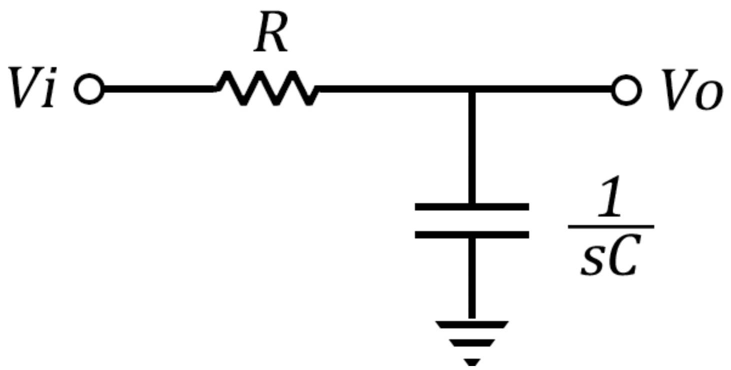
$f(t)$	$F(s)$
$\delta(t)$	1
$u(t)$	$\frac{1}{s}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$

$$H(s) = \frac{\frac{1}{RC}}{s + \frac{1}{RC}}$$

$$V_o(s) = H(s) \cdot V_i(s)$$

Exemplo

Exemplo: Calcule Vo(s) caso a entrada seja um degrau unitário. Encontre vo(t) através da Transformada Inversa de Laplace



$$u(t) = 1$$

$$F\big(u(t)\big) = \frac{1}{s} = V_i(s)$$

$$V_o(s) = \frac{\frac{1}{RC}}{s\left(s + \frac{1}{RC}\right)}$$

$$H(s) = \frac{\frac{1}{RC}}{s + \frac{1}{RC}}$$

$$V_o(s) = H(s) \cdot V_i(s)$$

Exemplo

Exemplo: Calcule Vo(s) caso a entrada seja um degrau unitário. Encontre vo(t) através da Transformada Inversa de Laplace

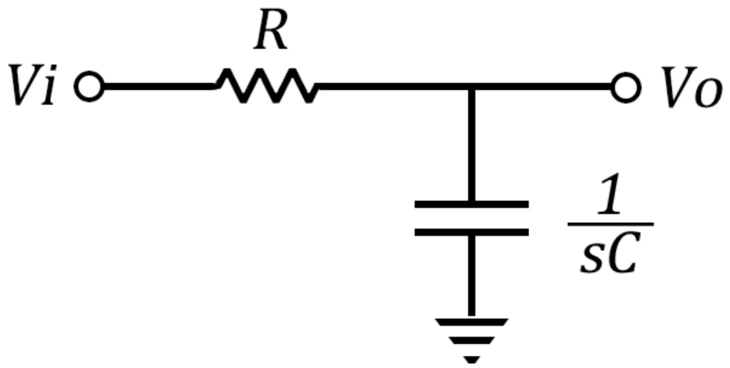


TABLE 15.2 Laplace transform pairs.

$f(t)$	$F(s)$
$\delta(t)$	1
$u(t)$	$\frac{1}{s}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$

$$V_o(s) = \frac{\frac{1}{RC}}{s\left(s+\frac{1}{RC}\right)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+\frac{1}{RC}} \rightarrow \quad \textbf{expansão em frações parciais}$$

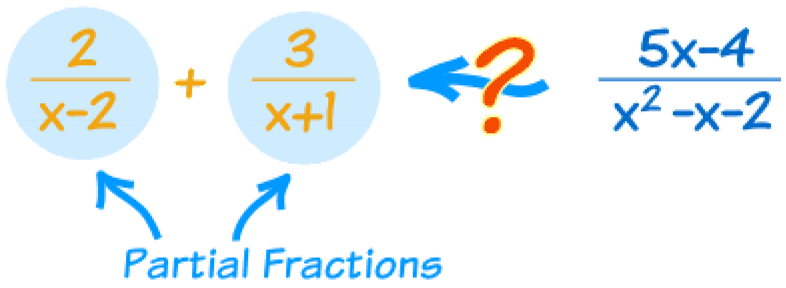
$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s+\frac{1}{RC}}\right] = v_o(t) = 1 - e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$v_c(t) = v_s\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \quad se \ \ v_s = 1$$

$$v_c(t) = 1 - e^{-\frac{t}{RC}} \quad \rightarrow \quad \textbf{confere}$$

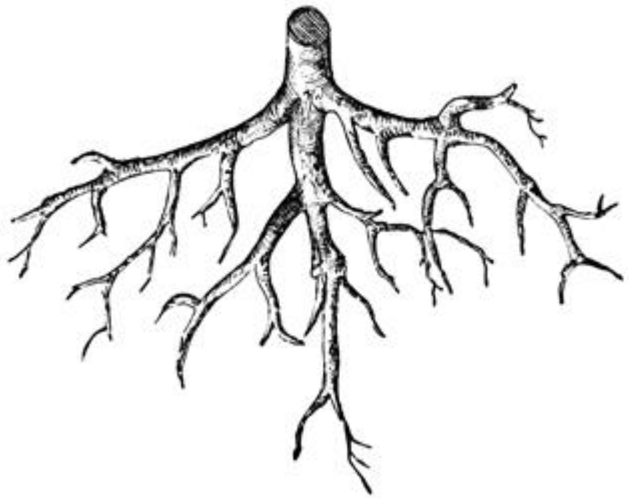
Expansão em frações parciais

Objetivo: Facilitar a obtenção da transformada inversa de Laplace (no contexto de circuitos)



As frações podem se encontrar nas seguintes configurações:

1. Raízes reais distintas
2. Raízes complexas conjugadas
3. Raízes reais repetidas
4. Raízes complexas repetidas
5. Raízes racionais impróprias



* Entendemos por raízes ou polos, as raízes do denominador da fração:

Reais distintas

As expansões em **frações parciais** seguem **algoritmos**. Cada configuração citada no slide anterior, possui algumas particularidades. Para reais distintas temos:

$$\frac{N(s)}{D(s)} = \frac{K_1}{s-\alpha_1} + \frac{K_1}{s-\alpha_2} + \cdots + \frac{K_n}{s-\alpha_n}$$

Os algoritmos serão discutidos através de exemplos, após cada exemplo veremos as aplicações no contexto de circuitos. Abaixo temos uma função racional já decomposta em funções parciais. O algoritmo visa calcular as constantes K (vide equação acima)

$$F(s) = \frac{10}{s(s+2)} = \frac{\mathbf{5}}{s} + \frac{\mathbf{-5}}{s+2}$$

Passo 1 – Explicitar as frações parciais

$$\frac{10}{s(s+2)} = \frac{k_1}{s-0} + \frac{k_2}{s-(-2)}$$

Note que os **polos** (raiz do denominador) foram propositalmente destacados. Esta procedimento facilita os cálculos.

Reais distintas

Passo 2 – Multiplicar ambos os lados da equação pelo denominador das frações parciais (**um a um**) e **igualar** a variável **s** ao valor do **polo**. Assim obteremos os valores das constantes K. O grau do polinómio do denominador define o número de contates K, consequentemente o número de equações parciais

$$\left.\frac{10}{s(s+2)}\cdot\cancel{(\boldsymbol{s}-0)}\right|_{s\,=\,0} = \frac{k_1}{\cancel{s-0}}\cdot\cancel{(\boldsymbol{s}-0)} + \frac{k_2}{s-(-2)}\cdot(\boldsymbol{s}-0)$$

$$\left.\frac{10}{(s+2)}\right|_{s\,=\,0} = k_1 + \frac{k_2}{s-(-2)}\cdot \mathrm{s}$$

Substituindo pelo valor da raiz:

$$\left.\frac{10}{(0+2)}\right|_{s\,=\,0} = k_1 + \frac{k_2}{s+2}\cdot 0 \qquad \therefore \qquad \boldsymbol{k_1} = 5$$

Reais distintas

Repetindo o Passo 2 para encontrar a segunda constante K

$$\left.\frac{10}{s\cancel{(s+2)}}\cdot\cancel{(\boldsymbol{s}-(-\boldsymbol{2}))}\right|_{\boldsymbol{s}=-\boldsymbol{2}} = \frac{k_1}{s}\cdot(\boldsymbol{s}-(-\boldsymbol{2})) + \frac{k_2}{\cancel{(\boldsymbol{s}-(-\boldsymbol{2}))}}\cdot\cancel{(\boldsymbol{s}-(-\boldsymbol{2}))}$$

$$\left.\frac{10}{s}\right|_{s=-2} = \frac{k_1}{s}\cdot(\boldsymbol{s}-(-\boldsymbol{2})) + k_2$$

Substituindo pelo valor da raiz:

$$\left.\frac{10}{-2}\right|_{s=-2} = \frac{k_1}{s}\cdot\left((-\boldsymbol{2})-(-\boldsymbol{2})\right) + k_2 \quad \therefore \quad k_2 = -5$$

Sempre que multiplicamos os termos pela relação (s-polo) eliminamos as constantes k das frações parciais que não possuem a relação (s-polo) no denominador, portanto encontraremos as constantes uma a uma.

Reais distintas

Resolvendo de um forma mais automática:

$$\boldsymbol{F(s) = \frac{10}{s(s+2)} = \frac{N(s)}{D(s)}}$$

Polos: $\boldsymbol{p_1 = 0}$
$\boldsymbol{p_2 = -2}$

$$\boldsymbol{k_n = \frac{N(p_n)}{D(p_n)} \cdot (den\ k_n)}$$

$$k_1 = \frac{N(p_1)}{D(p_1)} \cdot (den\ k_1) = \frac{10}{(0+2)} = \mathbf{5}$$

$$k_2 = \frac{N(p_2)}{D(p_2)} \cdot (den\ k_2) = \frac{10}{-2} = \mathbf{-5}$$

$$\boldsymbol{F(s) = \frac{10}{s(s+2)} = \frac{5}{s} + \frac{-5}{s+2}}$$

Exemplo 2:

$$\boldsymbol{F(s)=\frac{18s^2+66s+54}{(s+1)(s+2)(s+3)}=\frac{N(s)}{D(s)}}$$

Polos: $\boldsymbol{p_1=-1}$, $\boldsymbol{p_2=-2}$, $\boldsymbol{p_3=-3}$

$$\boldsymbol{k_n=\frac{N(p_n)}{D(p_n)}\cdot(den\ k_n)}$$

$$k_1=\frac{N(p_1)}{D(p_1)}\cdot(den\ k_1)=\frac{18\cdot(-1)^2+66\cdot(-1)+54}{(\mathbf{-1+2})(\mathbf{-1+3})}=3$$

$$k_2=\frac{N(p_2)}{D(p_2)}\cdot(den\ k_2)=\frac{18\cdot(-2)^2+66\cdot(-2)+54}{(\mathbf{-2+1})(\mathbf{-2+3})}=6$$

$$k_3=\frac{N(p_3)}{D(p_3)}\cdot(den\ k_3)=\frac{18\cdot(-3)^2+66\cdot(-3)+54}{(\mathbf{-3+1})(\mathbf{-3+2})}=-9$$

$$\boldsymbol{F(s)=\frac{18s^2+66s+54}{(s+1)(s+2)(s+3)}=\frac{3}{s+1}+\frac{6}{s+2}+\frac{-9}{s+3}}$$

Exemplo 3:

$$\boldsymbol{F(s) = \frac{6s^2 + 8s + 54}{(2s+1)(4s-2)(s+3)} = \frac{N(s)}{D(s)}}$$

Polos: $\boldsymbol{p_1 = -0,5}$
$\boldsymbol{p_2 = +0,5}$
$\boldsymbol{p_3 = -3}$

$$\boldsymbol{k_n = \frac{N(p_n)}{D(p_n)} \cdot (den\ k_n)}$$

$$k_1 = \frac{N(p_1)}{D(p_1)} \cdot (den\ k_1) = \frac{6 \cdot (-0{,}5)^2 + 8 \cdot (-0{,}5) + 54}{(4 \cdot (-0{,}5) - 2)(-0{,}5 + 3)} = \boldsymbol{-5,15}$$

$$k_2 = \frac{N(p_2)}{D(p_2)} \cdot (den\ k_2) = \frac{6 \cdot (0{,}5)^2 + 8 \cdot (0{,}5) + 54}{(2 \cdot (0{,}5) + 1)(0{,}5 + 3)} = \boldsymbol{8,5}$$

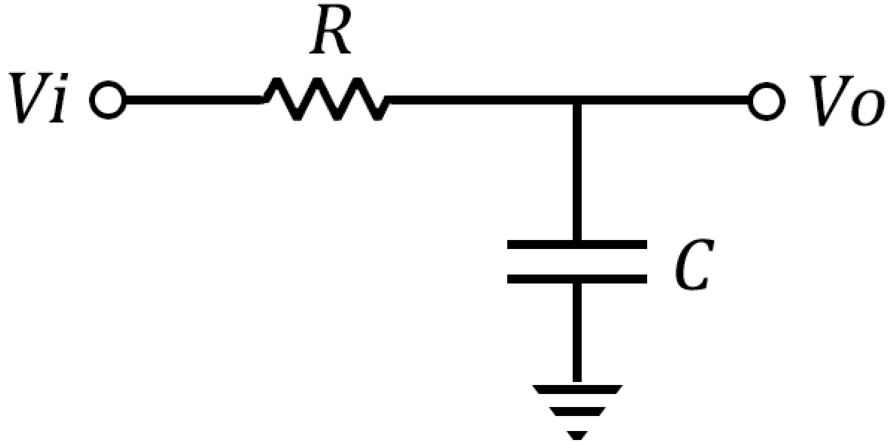
$$k_3 = \frac{N(p_3)}{D(p_3)} \cdot (den\ k_3) = \frac{6 \cdot (-3)^2 + 8 \cdot (-3) + 54}{(2 \cdot (-3) + 1)(4 \cdot (-3) - 2)} = \boldsymbol{1,2}$$

$$\boldsymbol{F(s) = \frac{6s^2 + 8s + 54}{(2s+1)(4s-2)(s+3)} = \frac{-5,15}{2s+1} + \frac{8,5}{4s-2} + \frac{1,2}{s+3} = \frac{-2,575}{s+0,5} + \frac{2{,}125}{s-0,5} + \frac{1,2}{s+3}}$$

Exercício

Exercício: De acordo com o circuito abaixo encontre (condições iniciais iguais a zero; $\boldsymbol{R = 200\Omega \ e \ C = 0,2mF}$):

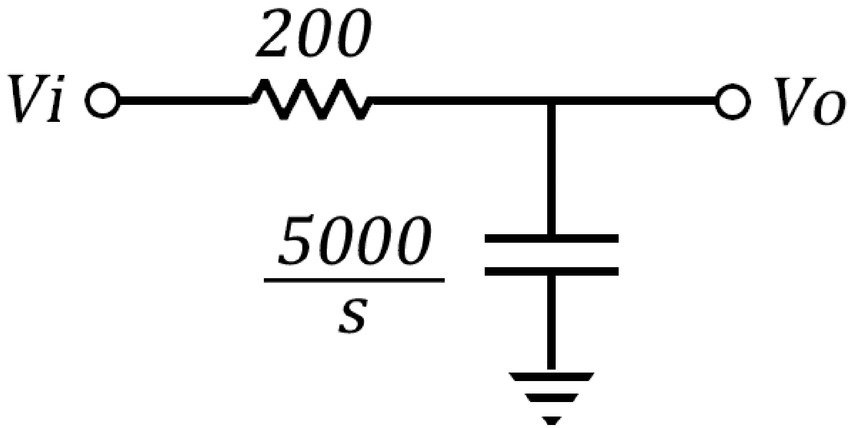
a) O circuito no domínio de Laplace
b) A função transferência
c) Encontre Vo(s) considerando uma entrada degrau
d) Encontre vo(t) através da transformada inversa de Laplace



Exercício

Exercício: De acordo com o circuito abaixo encontre (condições iniciais iguais a zero):

a) O circuito no domínio de Laplace
b) A função transferência



$$H(s) = \frac{V_0}{V_i} = \frac{\frac{5000}{s}}{200 + \frac{5000}{s}} = \frac{5000}{200 \cdot s + 5000} = \frac{25}{s + 25}$$

Exercício

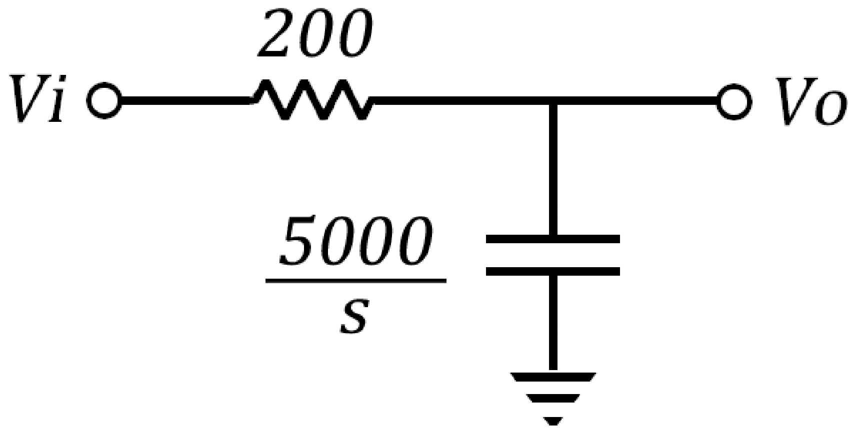
Exercício: De acordo com o circuito abaixo encontre (condições iniciais iguais a zero):

c) Encontre Vo(s) considerando uma entrada degrau

$$\boldsymbol{Au(t) = A\ (t > 0)\ \ \leftrightarrow\ \ V_i = \frac{A}{s}}$$

$$H(s) = \frac{V_0}{V_i} = \frac{25}{s + 25}$$

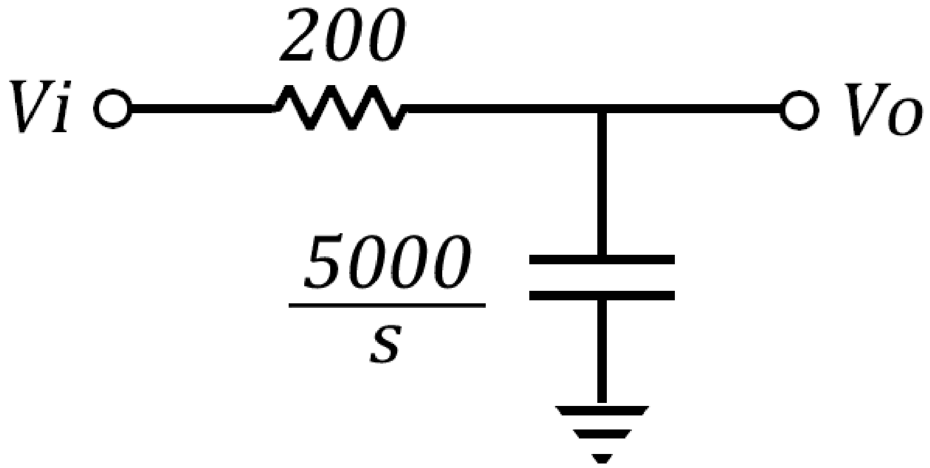
$$V_o = \frac{A \cdot 25}{s(s + 25)}$$



Exercício

Exercício: De acordo com o circuito abaixo encontre (condições iniciais iguais a zero):

d) Encontre vo(t) através da transformada inversa de Laplace



$$V_o = \frac{A \cdot 25}{s(s+25)} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s+25}$$

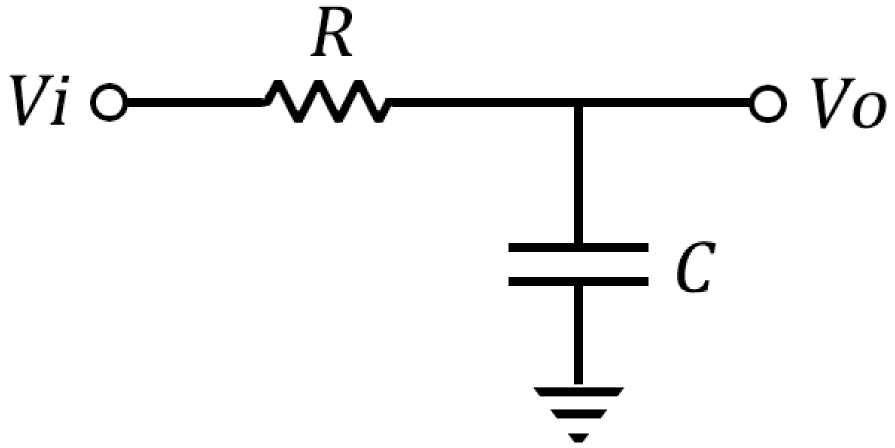
$$K_1 = \frac{A \cdot 25}{(0+25)} = A$$

$$K_2 = \frac{A \cdot 25}{-25} = -A$$

$$V_o = \frac{A \cdot 25}{s(s+25)} = \frac{A}{s} - \frac{A}{s+25}$$

Exercício: De acordo com o circuito abaixo encontre (condições iniciais iguais a zero):

d) Encontre vo(t) através da transformada inversa de Laplace



$$V_o = \frac{A \cdot 25}{s(s+25)} = \frac{A}{s} - \frac{A}{s+25}$$

$$\mathcal{L}^{-1}[V_o] = v_o(t) = A - A \cdot e^{-25 \cdot t}$$

$$v_o(t) = A(1 - e^{-25 \cdot t})V$$

$$Conferindo$$

$$\tau = RC = 0{,}04 \quad \frac{1}{\tau} = 25$$

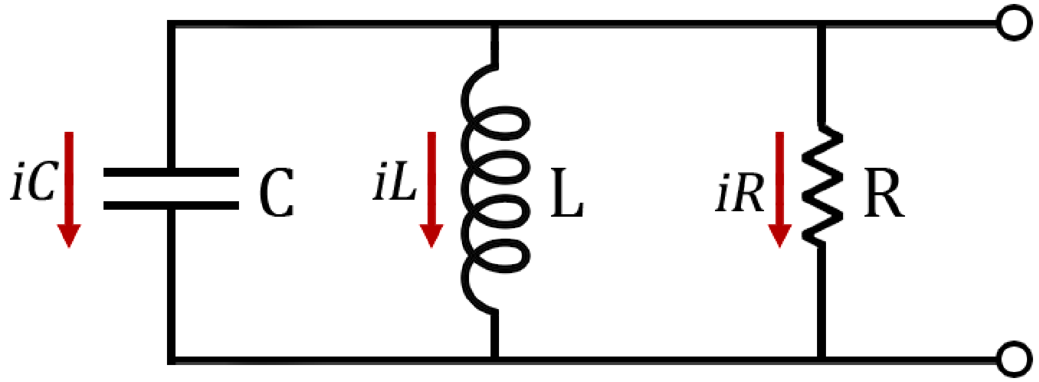
Circuitos de Segunda ordem RLC

Circuitos de segunda ordem são caracterizados por EDO's de segunda ordem. São compostos por Resistores, capacitores e indutores

Neste exemplo iremos caracterizar a resposta natural de um circuito RLC paralelo. Para que a resposta seja diferente de zero é necessário considerar condições iniciais, tais condições são a tensão inicial do capacitor e/ou a corrente inicial do indutor. Neste caso não é possível calcular a função transferência, pois estamos considerando as condições iniciais

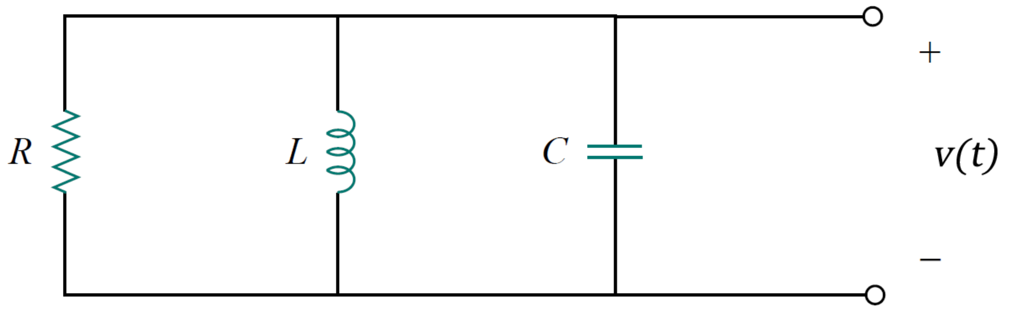
Iremos utilizar o recurso da Transformada de Laplace para facilitar a obtenção dos dados

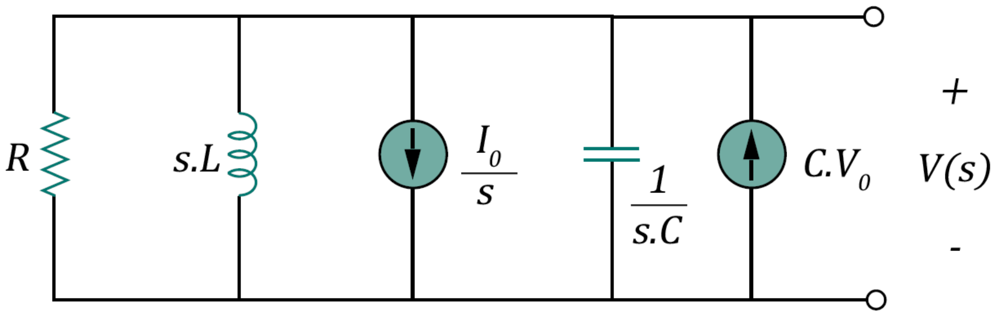
$$\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{1}{RC}\frac{dv}{dt} + \frac{v}{LC} = 0$$



Circuitos de Segunda ordem RLC

Obtendo a relação em no domínio de Laplace

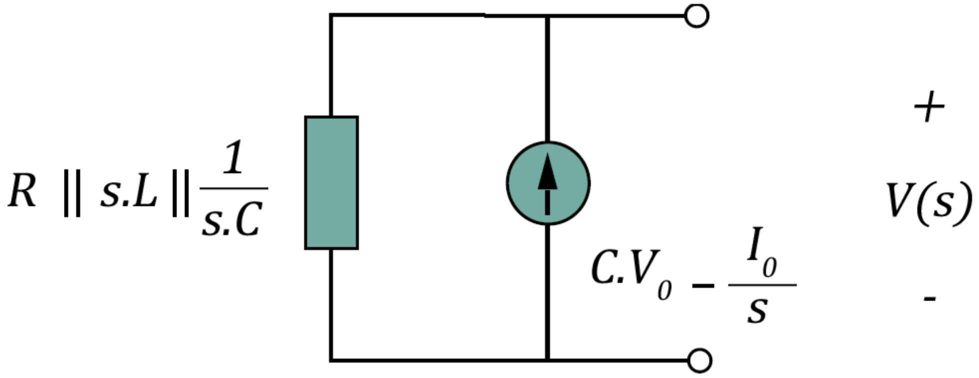




$$V(s) = Z_{eq}(s) \cdot I(s)$$

$$I(s) = C \cdot V_0 - \frac{I_0}{s}$$

$$Z_{eq}(s) = R \;||\; sL \;||\; \frac{1}{sC}$$



Circuitos de Segunda ordem RLC

$$Z_{eq}(s) = R \;||\; sL \;||\; \frac{1}{sC}$$

$$Z_{eq}(s) = R \;||\; \frac{\frac{sL}{sC}}{sL + \frac{1}{sC}} = R \;||\; \frac{sL}{s^2LC + 1}$$

$$Z_{eq}(s) = \frac{sL}{s^2LC + 1} || R = \frac{\frac{sRL}{s^2LC + 1}}{\frac{sL}{s^2LC + 1} + R} = \frac{sRL}{RLCs^2 + sL + R}$$

$$Z_{eq}(s) = \frac{sRL}{RLCs^2 + sL + R} = \frac{\boldsymbol{s\frac{1}{C}}}{\boldsymbol{s^2 + s\frac{1}{RC} + \frac{1}{LC}}}$$

$$V(s) = Z_{eq}(s) \cdot I(s)$$

$$I(s) = C \cdot V_0 - \frac{I_0}{s}$$

$$Z_{eq}(s) = R \;||\; sL \;||\; \frac{1}{sC}$$

Circuitos de Segunda ordem RLC

$$Z_{eq}(s) = \frac{s\frac{1}{C}}{s^2 + s\frac{1}{RC} + \frac{1}{LC}}$$

$$V(s) = \left(\frac{s\frac{1}{C}}{s^2 + s\frac{1}{RC} + \frac{1}{LC}}\right) \cdot \left(C \cdot V_0 - \frac{I_0}{s}\right)$$

$$\boldsymbol{V(s) = \frac{s \cdot V_0 - \frac{I_0}{C}}{s^2 + s\frac{1}{RC} + \frac{1}{LC}}}$$

$$V(s) = Z_{eq}(s) \cdot I(s)$$

$$I(s) = C \cdot V_0 - \frac{I_0}{s}$$

$$Z_{eq}(s) = R \;||\; sL \;||\; \frac{1}{sC}$$

Quais são os polos deste sistema?

Circuitos de Segunda ordem RLC

Quais são os polos deste sistema?

$$V(s) = \frac{s \cdot V_0 - \frac{I_0}{C}}{s^2 + s\frac{1}{RC} + \frac{1}{LC}}$$

Como o denominar resultou em uma equação do segundo grau, precisamos utilizar **bhaskara** para encontrar os polos

$$a = 1 \quad b = \frac{1}{RC} \quad c = \frac{1}{LC}$$

$$p_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac}}{a}$$

$$p_1 = -\frac{1}{2RC} + \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

$$p_2 = -\frac{1}{2RC} - \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

Circuitos de Segunda ordem RLC

$$p_1 = -\frac{1}{2RC} + \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

$$p_2 = -\frac{1}{2RC} - \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

$$\alpha = \frac{1}{2RC} \quad e \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$\alpha \rightarrow Frequencia\ de\ Neper$

$\omega_0 \rightarrow Frequencia\ angular\ de\ ressonância$

$$p_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

$$p_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

Circuitos de Segunda ordem RLC

$$\alpha = \frac{1}{2RC} \quad e \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$\alpha \rightarrow Frequencia\ de\ Neper$

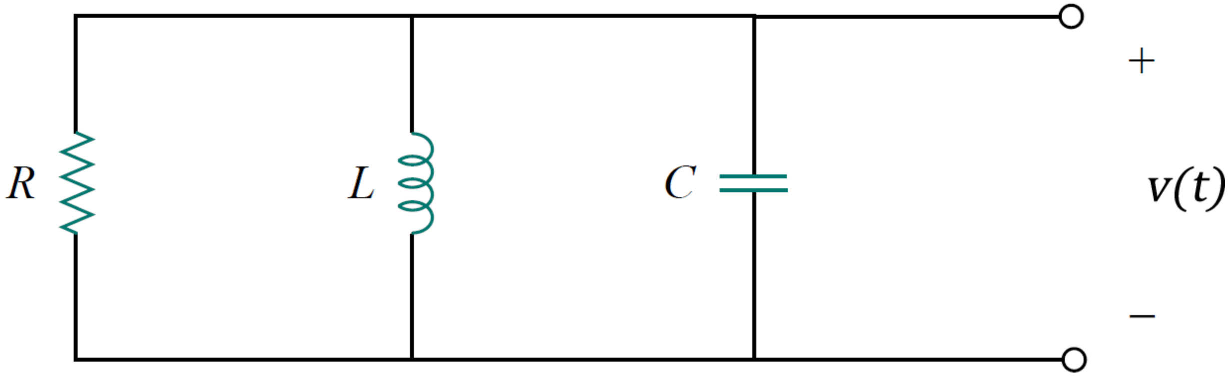
$\omega_0 \rightarrow Frequencia\ angular\ de\ ressonância$

$$p_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \qquad p_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

$\alpha^2 > \omega_0^2$	**Raízes reais distintas** (Resposta superamortecida)
$\alpha^2 < \omega_0^2$	**Raízes complexas conjugadas** (Resposta subamortecida)
$\alpha^2 = \omega_0^2$	**Raízes reais e iguais** (Resposta criticamente amortecida)

Circuitos de Segunda ordem RLC

Exemplo: Calcule a reposta natural, no domínio do tempo, do circuito abaixo:



$$R = 200\Omega$$

$$L = 50mH$$

$$C = 0{,}2\mu F$$

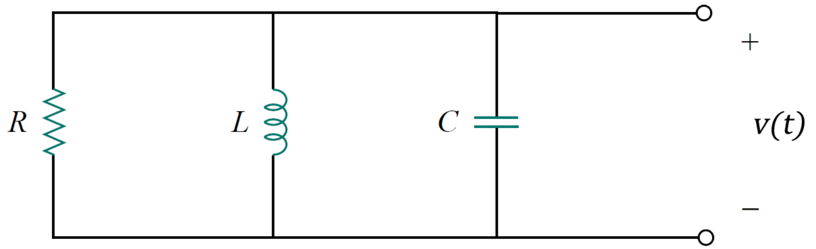
$$v_c(0^-) = 12V = V_0$$

$$i_L(0^-) = 30mA = I_0$$

$\boldsymbol{Resposta}$: $v(t) = -14e^{-5000t} + 26e^{-20000t}\ V$

Circuitos de Segunda ordem RLC

Exemplo: Calcule a reposta natural, no domínio do tempo, do circuito abaixo:



$$V(s) = \frac{s \cdot V_0 - \frac{I_0}{C}}{s^2 + s\frac{1}{RC} + \frac{1}{LC}}$$

$R = 200\Omega$

$L = 50mH$

$C = 0{,}2\mu F$

$$V(s) = \frac{12 \cdot s - 15 \cdot 10^4}{(s - p_1)(s - p_2)}$$

$v_c(0^-) = 12V = V_0$

$i_L(0^-) = 30mA = I_0$

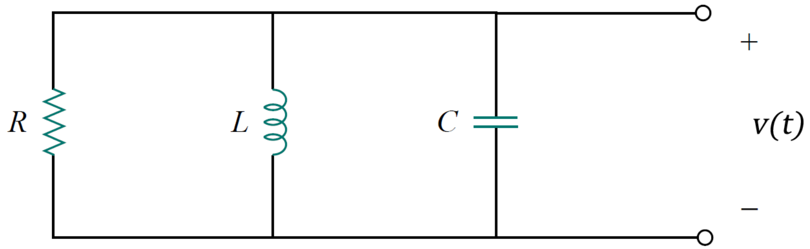
$$p_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

$$\alpha = \frac{1}{2RC} = 12500 \quad e \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 10000$$

**** Resposta superamortecida $(\alpha^2 > \omega_0^2)$**

Circuitos de Segunda ordem RLC

Exemplo: Calcule a reposta natural, no domínio do tempo, do circuito abaixo:



$$V(s) = \frac{12 \cdot s - 15 \cdot 10^4}{(s - p_1)(s - p_2)}$$

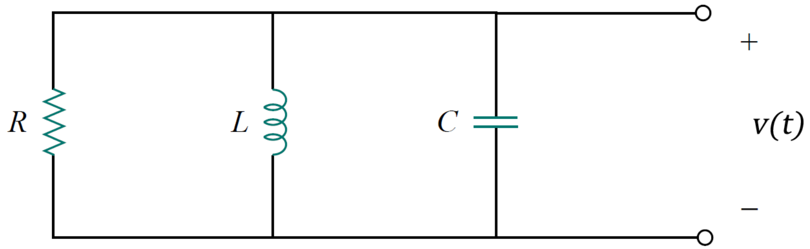
$$\alpha = \frac{1}{2RC} = 12500 \quad e \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 10000$$

$$p_1 = -12500 + \sqrt{12500^2 - 10000^2} = -12500 + 7500 = -5000$$

$$p_2 = -12500 - \sqrt{12500^2 - 10000^2} = -12500 - 7500 = -20000$$

Circuitos de Segunda ordem RLC

Exemplo: Calcule a reposta natural, no domínio do tempo, do circuito abaixo:



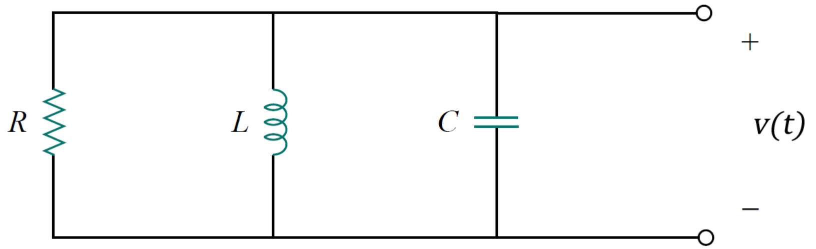
$$V(s) = \frac{12 \cdot s - 15 \cdot 10^4}{(s + 5000\,)(s + 20000)}$$

Expansão em frações parciais:

$$V(s) = \frac{12 \cdot s - 15 \cdot 10^4}{(s + 5000\,)(s + 20000)} = \frac{K_1}{(s + 5000)} + \frac{K_2}{(s + 20000)}$$

Circuitos de Segunda ordem RLC

Exemplo: Calcule a reposta natural, no domínio do tempo, do circuito abaixo:



$$V(s) = \frac{12 \cdot s - 15 \cdot 10^4}{(s + 5000\,)(s + 20000)}$$

Expansão em frações parciais:

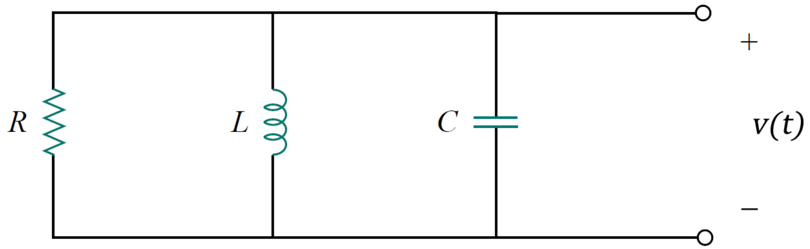
$$K_1 = \frac{12 \cdot (-5000) - 15 \cdot 10^4}{((-5000) + 20000)} = \frac{-210000}{15000} = -14$$

$$K_2 = \frac{12 \cdot (-20000) - 15 \cdot 10^4}{((-20000) + 5000)} = \frac{-390000}{-15000} = 26$$

$$\boldsymbol{V(s) = -\frac{14}{s + 5000} + \frac{26}{s + 20000}}$$

Circuitos de Segunda ordem RLC

Exemplo: Calcule a reposta natural, no domínio do tempo, do circuito abaixo:



$$V(s) = \frac{12 \cdot s - 15 \cdot 10^4}{(s + 5000\,)(s + 20000)}$$

$$V(s) = -\frac{14}{s + 5000} + \frac{26}{s + 20000}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{L}^{-1}[V(s)] = v(t) = -14 \cdot e^{-5000 \cdot t} + 26 \cdot e^{-20000 \cdot t}\ V}$$

Circuitos de Segunda ordem RLC

O gráfico da tensão pode ser visualizado na figura abaixo, note que a tensão inicial é igual a tensão do capacitor, que a tensão estabiliza em zero (uma vez que a resposta é natural) e também que não há um sobre sinal, ou seja a tensão não atravessa o eixo x antes de estabilizar. Esta resposta é conhecida por **superamortecida**

$$v(t) = -14 \cdot e^{-5000 \cdot t} + 26 \cdot e^{-20000 \cdot t}\ V$$

O capacitor e o indutor realizam trocas de energia, ou seja, o campo elétrico do capacitor é convertido em campo magnético no indutor, e vice-versa. Quanto maior o valor de R por mais tempo essas inversões ocorrem. O resistor “rouba” energia do sistema.