Aula 13

Transformada de Laplace III

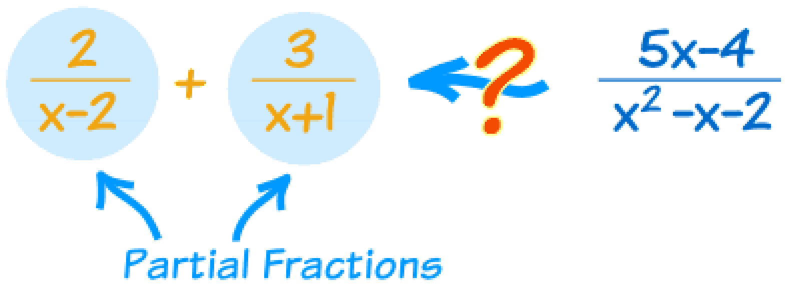
Matérias que serão discutidas
Nilsson – Circuitos Elétricos
Capítulos 12, 13 e 14 – LAPLACE
Capítulo 8 – Circuitos de Segunda ordem no domínio do tempo

Circuitos Elétricos II

Prof. Henrique Amorim - UNIFESP - ICT

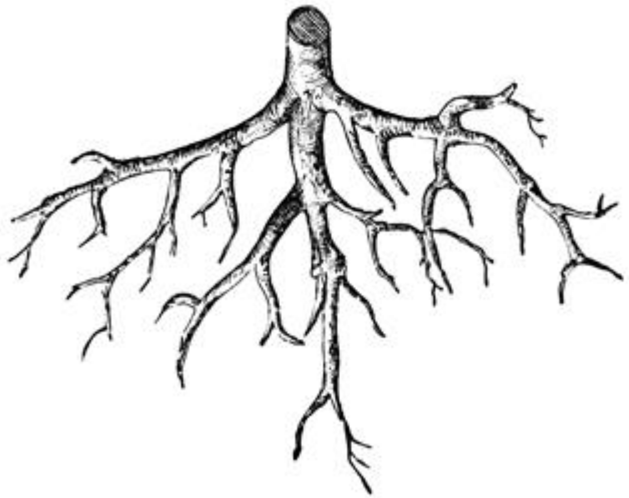
Expansão em frações parciais

Objetivo: Facilitar a obtenção da transformada inversa de Laplace (no contexto de circuitos)



As frações podem se encontrar nas seguintes configurações:

1. Raízes reais distintas
2. Raízes complexas conjugadas
3. Raízes reais repetidas
4. Raízes complexas repetidas
5. Raízes racionais impróprias



* Entendemos por raízes ou polos, as raízes do denominador da fração:

Reais distintas

As expansões em **frações parciais** seguem **algoritmos**. Cada configuração citada no slide anterior, possui algumas particularidades. Para reais distintas temos:

$$\frac{N(s)}{D(s)} = \frac{K_1}{s-\alpha_1} + \frac{K_1}{s-\alpha_2} + \cdots + \frac{K_n}{s-\alpha_n}$$

Os algoritmos serão discutidos através de exemplos, após cada exemplo veremos as aplicações no contexto de circuitos. Abaixo temos uma função racional já decomposta em funções parciais. O algoritmo visa calcular as constantes K (vide equação acima)

$$F(s) = \frac{10}{s(s+2)} = \frac{\mathbf{5}}{s} + \frac{\mathbf{-5}}{s+2}$$

Passo 1 – Explicitar as frações parciais

$$\frac{10}{s(s+2)} = \frac{k_1}{s-0} + \frac{k_2}{s-(-2)}$$

Note que os **polos** (raiz do denominador) foram propositalmente destacados. Esta procedimento facilita os cálculos.

Circuitos de Segunda ordem RLC Paralelo

$$\alpha = \frac{1}{2RC} \quad e \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$\alpha \rightarrow Frequencia\ de\ Neper\ \ (rad/seg)$

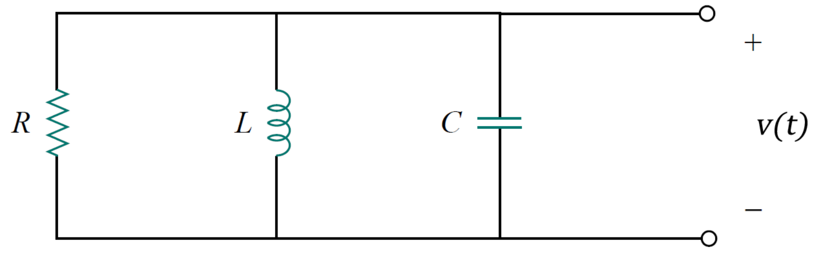
$\omega_0 \rightarrow Frequencia\ angular\ de\ ressonância\ \ (rad/seg)$

$$p_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \qquad p_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

$\alpha^2 > \omega_0^2$	**Raízes reais distintas** (Resposta superamortecida)
$\alpha^2 < \omega_0^2$	**Raízes complexas conjugadas** (Resposta subamortecida)
$\alpha^2 = \omega_0^2$	**Raízes reais e iguais** (Resposta criticamente amortecida)

Circuitos de Segunda ordem RLC

Exemplo: Calcule a reposta natural, no domínio do tempo, do circuito abaixo:



$R = 200\Omega$

$L = 50mH$

$C = 0{,}2\mu F$

$$V(s) = -\frac{14}{s+5000} + \frac{26}{s+20000}$$

$v_c(0^-) = 12V = V_0$

$i_L(0^-) = 30mA = I_0$

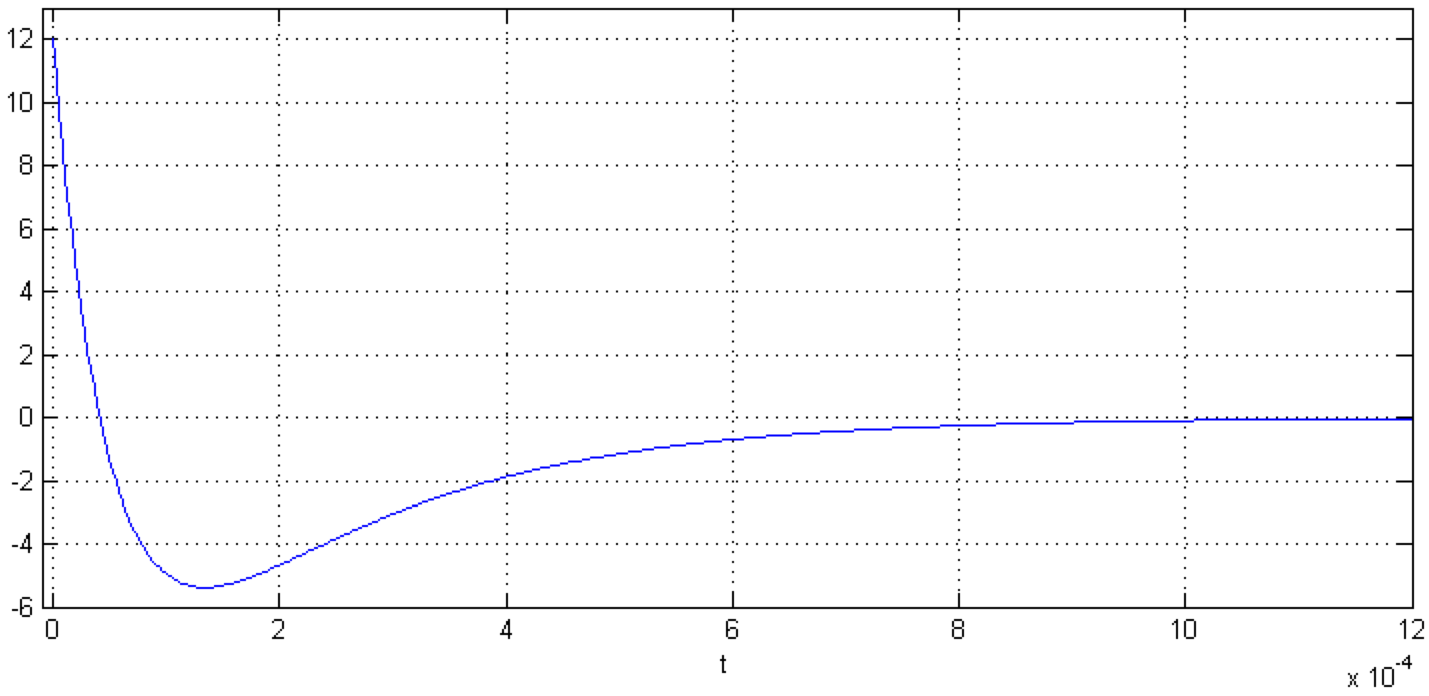
$$\boxed{\mathcal{L}^{-1}[V(s)] = v(t) = -14 \cdot e^{-5000 \cdot t} + 26 \cdot e^{-20000 \cdot t}\ V}$$

Circuitos de Segunda ordem RLC

O gráfico da tensão pode ser visualizado na figura abaixo, note que a tensão inicial é igual a tensão do capacitor, que a tensão estabiliza em zero (uma vez que a resposta é natural) e também que não há um sobre sinal, ou seja a tensão não atravessa o eixo x antes de estabilizar. Esta resposta é conhecida por **superamortecida**

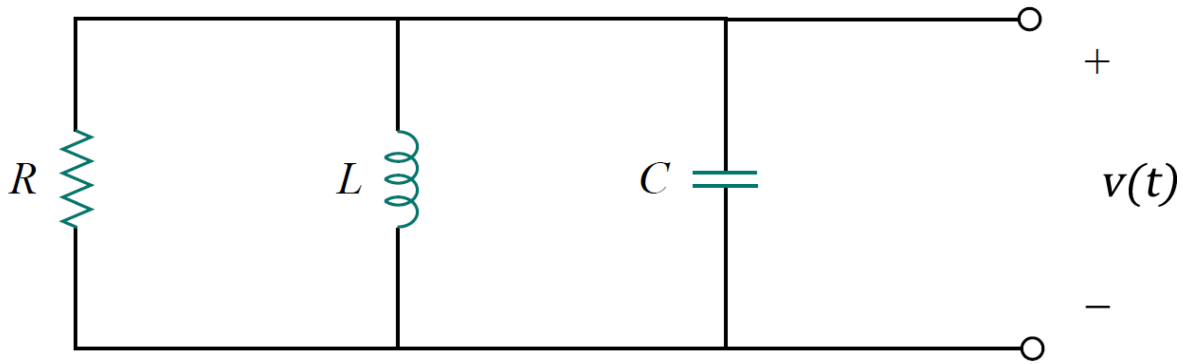
$$v(t) = -14 \cdot e^{-5000 \cdot t} + 26 \cdot e^{-20000 \cdot t}\ V$$

O capacitor e o indutor realizam trocas de energia, ou seja, o campo elétrico do capacitor é convertido em campo magnético no indutor, e vice-versa. Quanto maior o valor de R por mais tempo essas inversões ocorrem. O resistor “rouba” energia do sistema.



Circuitos de Segunda ordem RLC

Exemplo: Calcule a reposta natural, no domínio do tempo, do circuito abaixo:



$$R = 3125\Omega$$

$$L = 50mH$$

$$C = 0{,}2\mu F$$

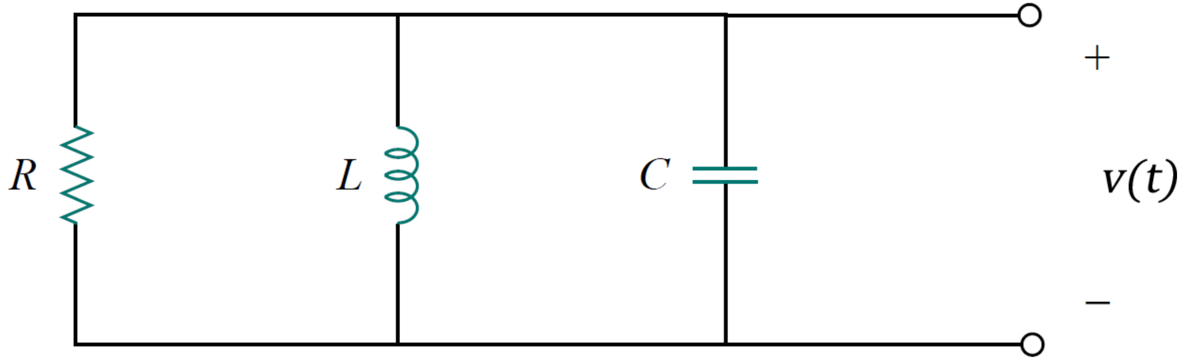
Neste exemplo iremos avaliar a resposta natural de um circuito RLC paralelo, o mesmo circuito analisado anteriormente, entretanto com uma resistência maior

$$v_c(0^-) = 12V = V_0$$

$$i_L(0^-) = 30mA = I_0$$

Circuitos de Segunda ordem RLC

Exemplo: Calcule a reposta natural, no domínio do tempo, do circuito abaixo:



$R = 3125\Omega$

$L = 50mH$

$C = 0{,}2\mu F$

$v_c(0^-) = 12V = V_0$

$i_L(0^-) = 30mA = I_0$

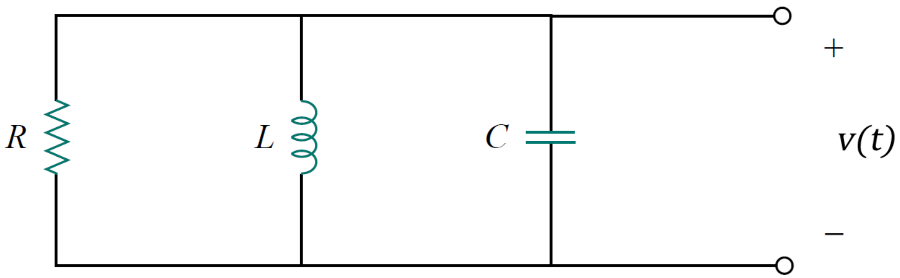
Função no domínio de s

$$\boldsymbol{V(s) = \frac{V_0 \cdot s - \frac{I_0}{C}}{s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC}}}$$

Eq. Característica

$$\boldsymbol{s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC}}$$

Circuitos de Segunda ordem RLC



$$\boldsymbol{V(s) = \frac{12 \cdot s - 150000}{s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC}}}$$

$R = 3125\Omega$

$L = 50mH$

$C = 0{,}2\mu F$

$$p_{1,2} = -\frac{1}{2RC} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

$v_c(0^-) = 12V = V_0$

$i_L(0^-) = 30mA = I_0$

**** Atenção as constantes são validades para RLC paralelo**

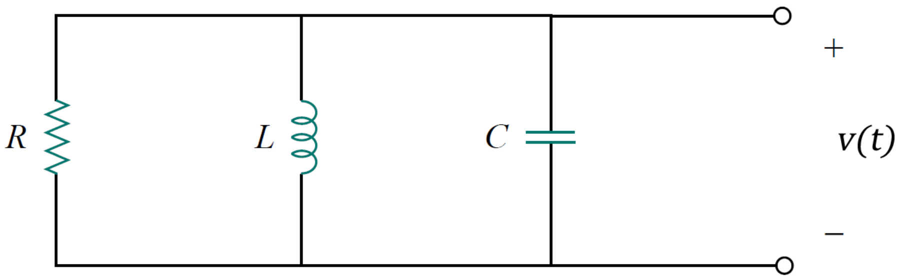
$$\alpha = \frac{1}{2RC} = \frac{1}{2 \cdot 3125 \cdot 0{,}2 \cdot 10^{-6}} = \mathbf{800} \quad e \quad \alpha^2 = \mathbf{6,4 \cdot 10^5}$$

$$p_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} = \frac{1}{50 \cdot 10^{-3} \cdot 0{,}2 \cdot 10^{-6}} = \mathbf{1000 \cdot 10^5}$$

$$p_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

Circuitos de Segunda ordem RLC



$$\boldsymbol{V(s) = \frac{12 \cdot s - 150000}{s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC}}}$$

$R = 3125\Omega$

$L = 50mH$

$C = 0{,}2\mu F$

$\alpha = 800 \quad ; \quad \alpha^2 = 6{,}4 \cdot 10^5 \quad ; \quad \omega_0^2 = 1000 \cdot 10^5$

$v_c(0^-) = 12V = V_0$

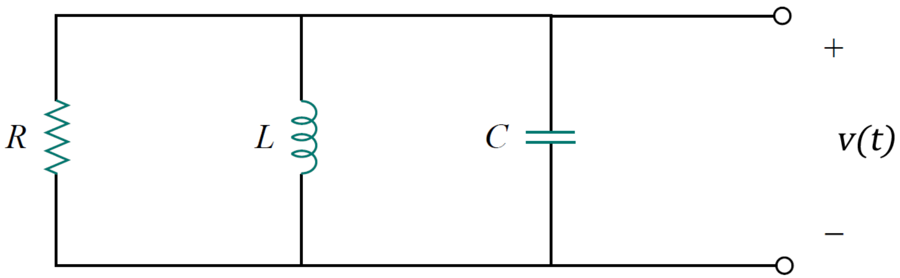
$i_L(0^-) = 30mA = I_0$

$$p_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -800 + \sqrt{6{,}4 \cdot 10^5 - 1000 \cdot 10^5}$$

$$p_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -800 - \sqrt{6{,}4 \cdot 10^5 - 1000 \cdot 10^5}$$

$$\boldsymbol{p_1 = -800 + 9967{,}95j}$$
$$\boldsymbol{p_2 = -800 - 9967{,}95j}$$

Circuitos de Segunda ordem RLC



$$\boldsymbol{V(s) = \frac{12 \cdot s - 150000}{s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC}}}$$

$R = 3125\Omega$

$L = 50mH$

$C = 0{,}2\mu F$

$$\boldsymbol{p_1 = -800 + 9967{,}95j}$$

$$\boldsymbol{p_2 = -800 - 9967{,}95j}$$

$v_c(0^-) = 12V = V_0$

$i_L(0^-) = 30mA = I_0$

$$V(s) = \frac{12 \cdot s - 150000}{(s - p_1)(s - p_2)}$$

$$V(s) = \frac{12 \cdot s - 150000}{(s - (-800 + 9967{,}95j))(s - (-800 - 9967{,}95j))}$$

Circuitos de Segunda ordem RLC

$$\boldsymbol{p_1 = -800 + 9967,95j}$$
$$\boldsymbol{p_2 = -800 - 9967,95j}$$

$$V(s) = \frac{12 \cdot s - 150000}{(s - (-800 + 9967{,}95j))(s - (-800 - 9967{,}95j))}$$

$$V(s) = \frac{12 \cdot s - 150000}{(s - p_1)(s - p_2)}$$

Relembrando

$$\boldsymbol{x + yj = Me^{j\theta}} \qquad \boldsymbol{M = \sqrt{x^2 + y^2}} \qquad \boldsymbol{\theta = \text{atan}\left(\frac{y}{x}\right)} *$$

No segundo quadrante somamos 180º de θ
No terceiro quadrante subtraímos 180º de θ

$$K_1 = \left.\frac{12 \cdot s - 150000}{(s - p_2)}\right|_{s = p_1} = \frac{12 \cdot (-800 + 9967{,}95j) - 150000}{((-800 + 9967{,}95j) - (-800 - 9967{,}95j))} \cong \boldsymbol{6 + 8i}$$

$$K_2 = \left.\frac{12 \cdot s - 150000}{(s - p_1)}\right|_{s = p_2} = \frac{12 \cdot (-800 - 9967{,}95j) - 150000}{((-800 - 9967{,}95j) - (-800 + 9967{,}95j))} \cong \boldsymbol{6 - 8i}$$

$$\boldsymbol{K_1 = 10e^{j53{,}13^o}} \qquad \boldsymbol{K_2 = 10e^{-j53{,}13^o}}$$

Circuitos de Segunda ordem RLC

$$\boldsymbol{p_1 = -800 + 9967,95j}$$
$$\boldsymbol{p_2 = -800 - 9967,95j}$$

$$V(s) = \frac{12 \cdot s - 150000}{(s - (-800 + 9967{,}95j))(s - (-800 - 9967{,}95j))}$$

$$V(s) = \frac{12 \cdot s - 150000}{(s - p_1)(s - p_2)} = \frac{10e^{53{,}13^o j}}{(s + 800 - 9967{,}95j)} + \frac{10e^{-53{,}13^o j}}{(s + 800 + 9967{,}95j)}$$

$$\mathcal{L}^{-1}[V(s)] = v(t) = 10e^{53{,}13^o j} \cdot e^{(-800+9967{,}95j)t} + 10e^{-53{,}13^o j} \cdot e^{(-800-9967{,}95j)t}$$

Circuitos de Segunda ordem RLC

$$\mathcal{L}^{-1}[V(s)] = v(t) = 10e^{53,13^o j} \cdot e^{(-800+9967,95j)t} + 10e^{-53,13^o j} \cdot e^{(-800-9967,95j)t}$$

$$v(t) = 10e^{53,13^o j} \cdot e^{-800t} \cdot e^{+9967,95jt} + 10e^{-53,13^o j} \cdot e^{-800t} \cdot e^{-9967,95jt}$$

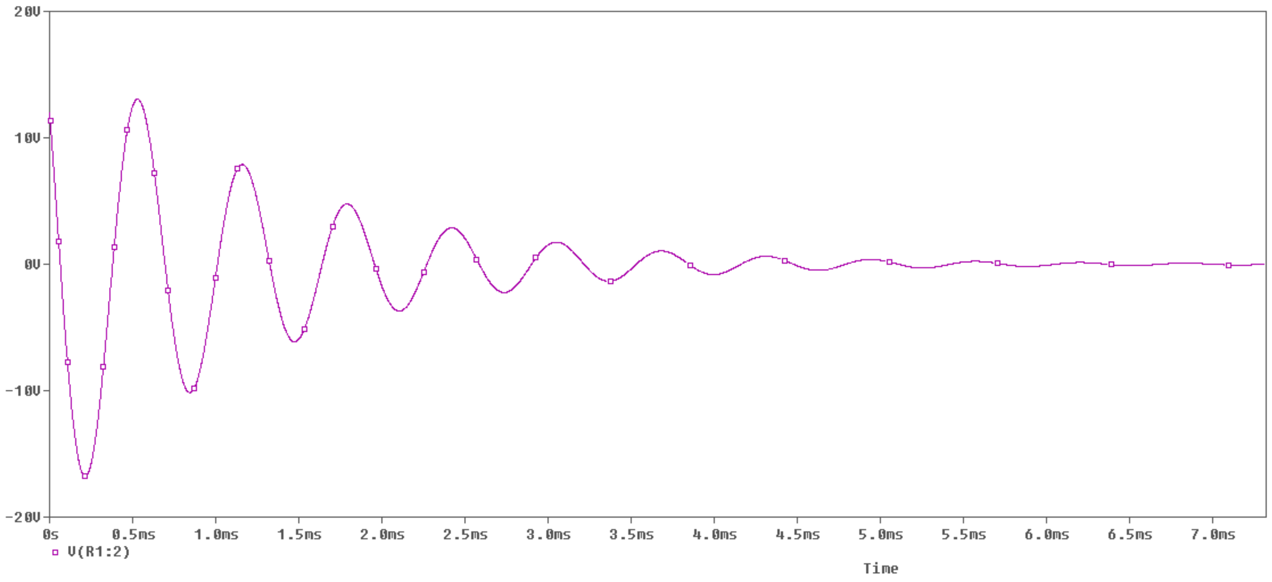
$$v(t) = 10 \cdot e^{-800t}(e^{53,13^o j} . e^{+9967,95jt} + e^{-53,13^o j} \cdot e^{-9967,95jt})$$

$$v(t) = 10 \cdot e^{-800t}(e^{j(53,13^o+9967,95t)} + e^{-j(53,13^o+9967,95t)})$$

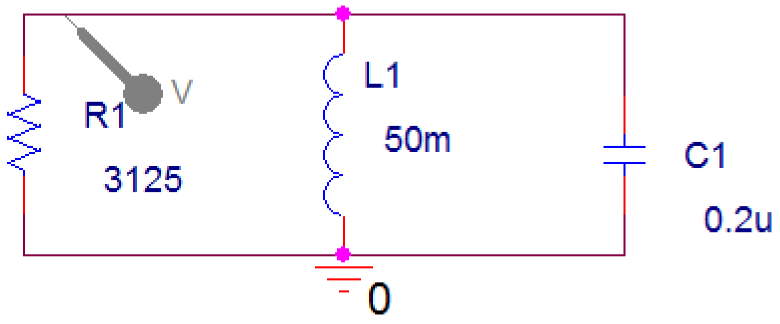
$$cos(s) = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2} \quad \therefore \quad 2\,cos(x) = e^{jx} + e^{-jx}$$

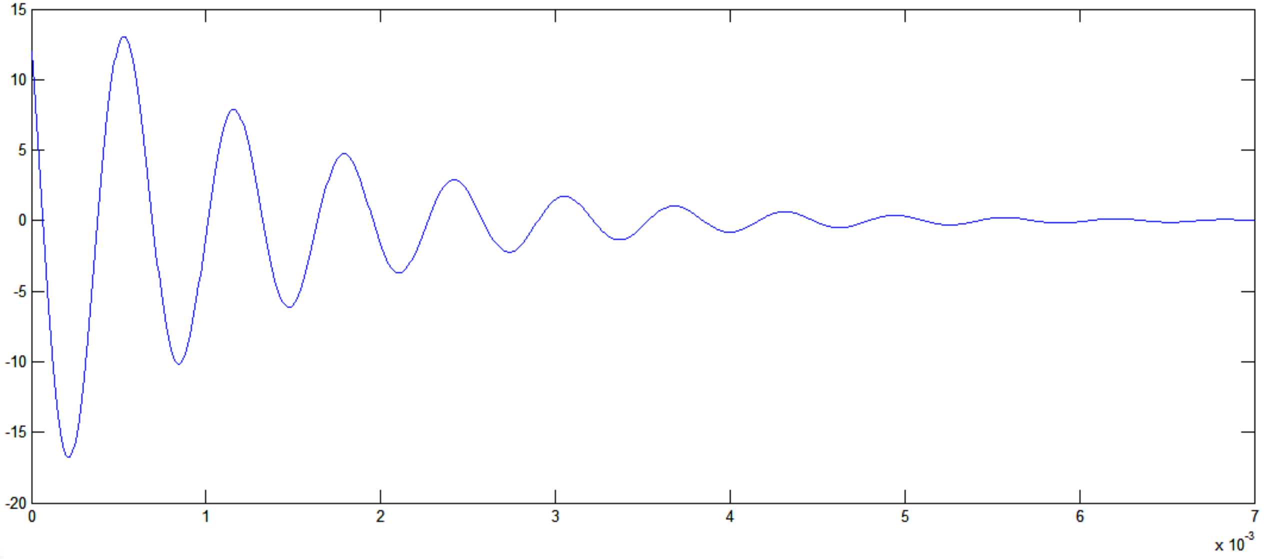
$$\boldsymbol{v(t) = 20 \cdot e^{-800t} \cdot cos(9967,95t + 53,13^o)V}$$

Circuitos de Segunda ordem RLC



Pspice



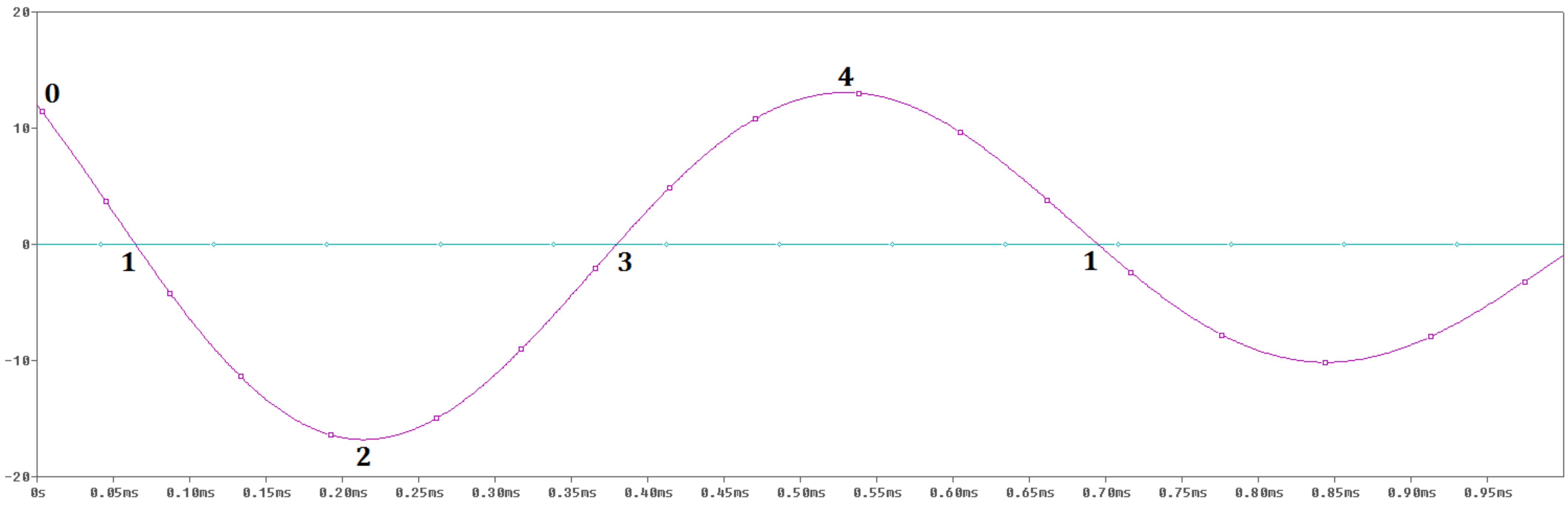


Matlab

```
t=linspace(0,7e-3,1000);
v = 20*exp(-800.*t);
v = v.*cos(9967.95.*t+0.9273);
plot(t,v)
```

Circuitos de Segunda ordem RLC

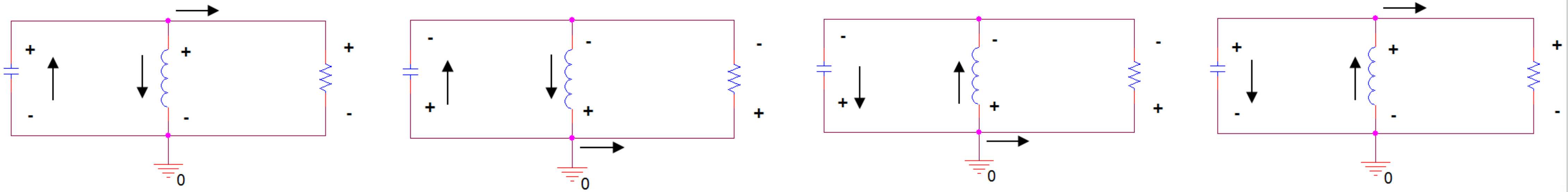
Abaixo uma amostra do comportamento da tensão. A cada “carga e descarga” do capacitor/indutor uma parte da energia é dissipada pelo resistor, assim, o circuito tende a estabilizar em 0V. No próximo slide avalie o a **polaridade da tensão** vs a **direção da corrente**.

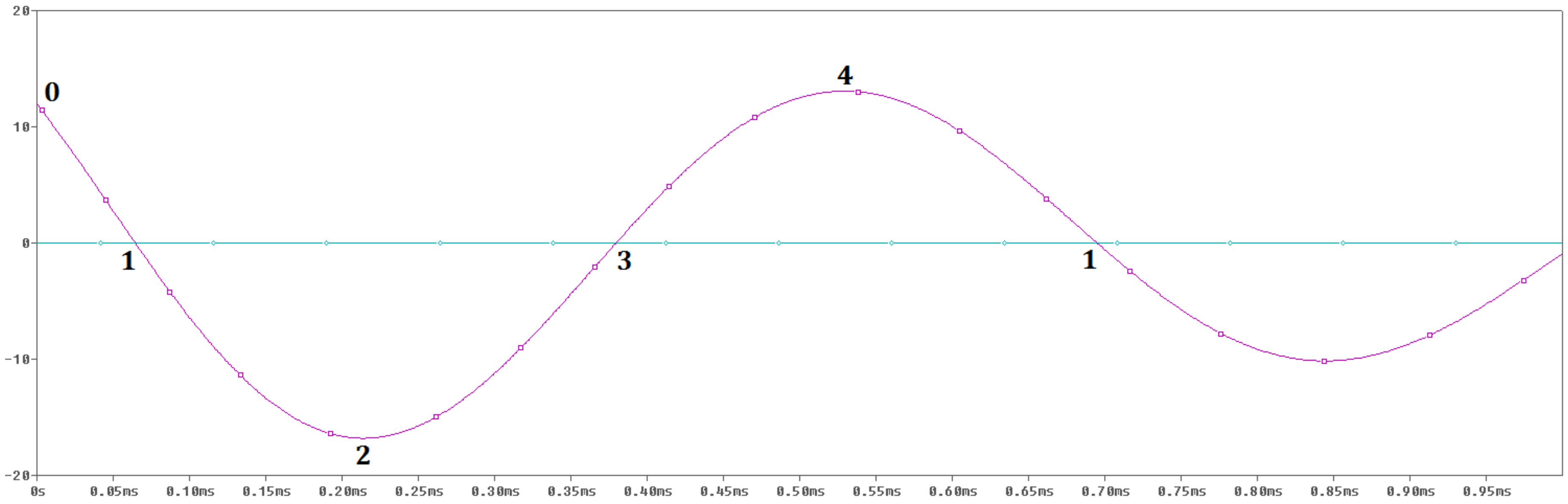


Circuitos de Segunda ordem RLC

No capacitor a tensão não varia de forma abrupta, no indutor a corrente não varia de forma abrupta

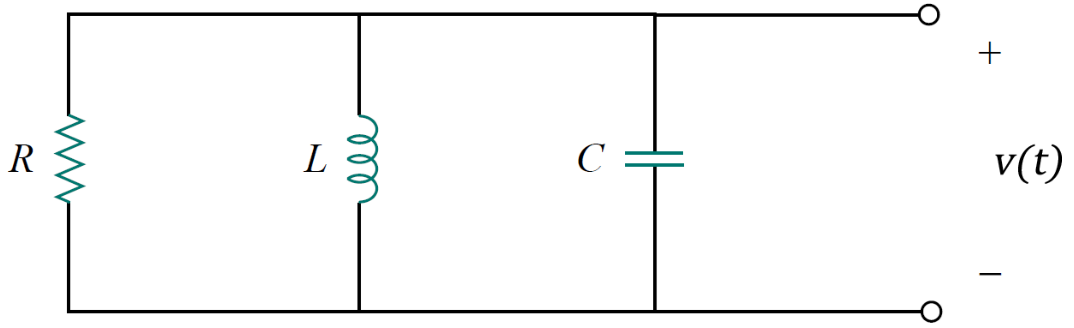
Intervalo 0 e 1 **Intervalo 1 e 2** **Intervalo 2 e 3** **Intervalo 3 e 4**





Circuitos de Segunda ordem RLC

Considerando mesmo circuito RLC



$$R = X\Omega$$

$$L = 50mH$$

$$C = 0{,}2\mu F$$

$$\boldsymbol{V(s)} = \frac{\boldsymbol{V_0 \cdot s - \frac{I_0}{C}}}{\boldsymbol{s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC}}}$$

$$v_c(0^-) = 12V = V_0$$

$$i_L(0^-) = 30mA = I_0$$

$$s_{1,2} = -\frac{1}{2RC} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

Uma vez que os parâmetro RLC são reais e maiores que zero, o valor dos polos será sempre negativo

Circuitos de Segunda ordem RLC

A velocidade de resposta possui um valor crítico, ou seja, estaciona mais rápido quando obtemos uma resposta criticamente amortecida. A relação é encontrada quando os polos do sistema são reais e iguais:

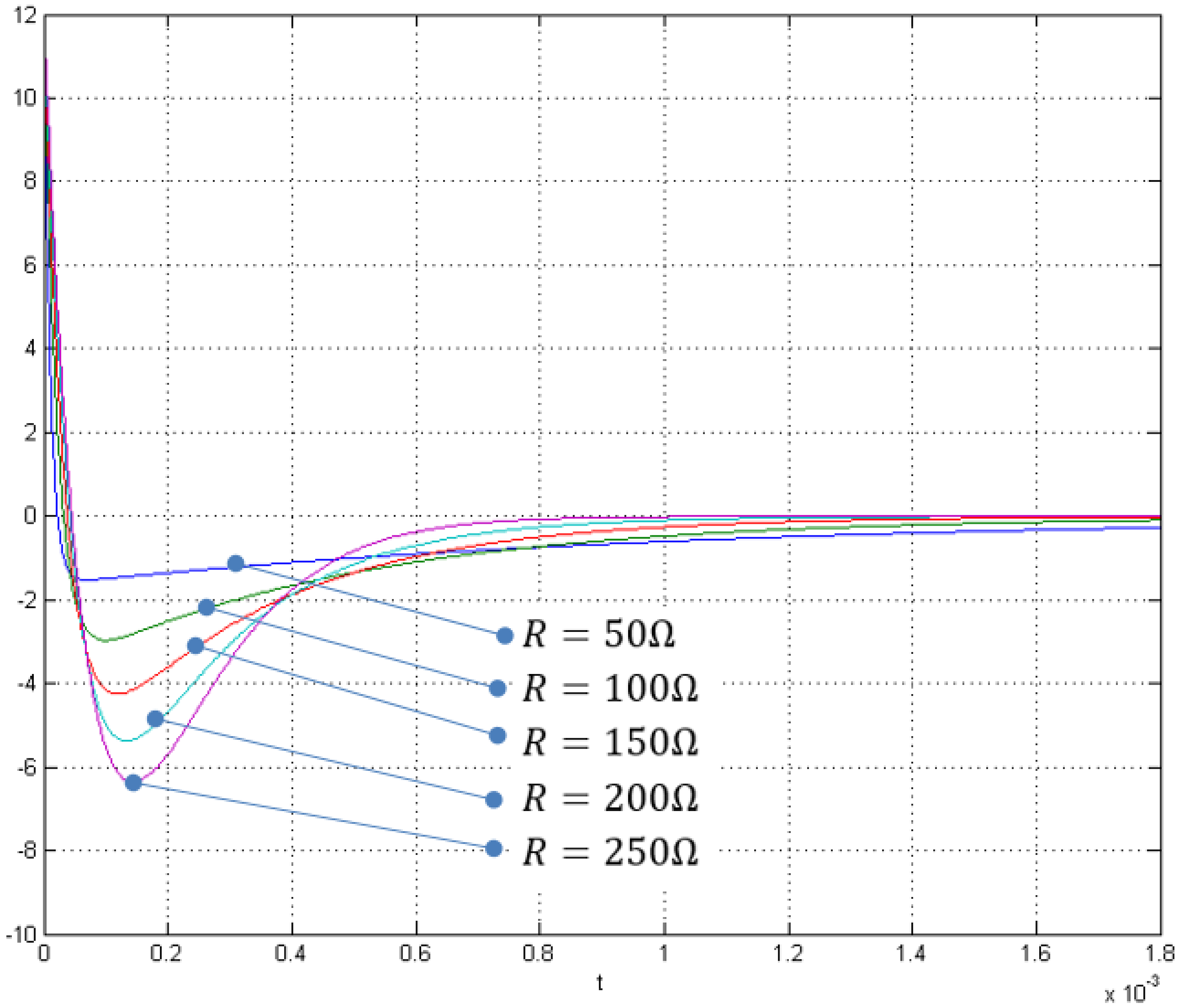
$$s_{1,2} = -\frac{1}{2RC} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

$$\alpha^2 = \omega_0^2$$

$$\left(\frac{1}{2R \cdot 0{,}2 \cdot 10^{-6}}\right)^2 = \frac{1}{50 \cdot 10^{-3} \cdot 0{,}2 \cdot 10^{-6}}$$

$$\boldsymbol{R = \pm 250\Omega}$$

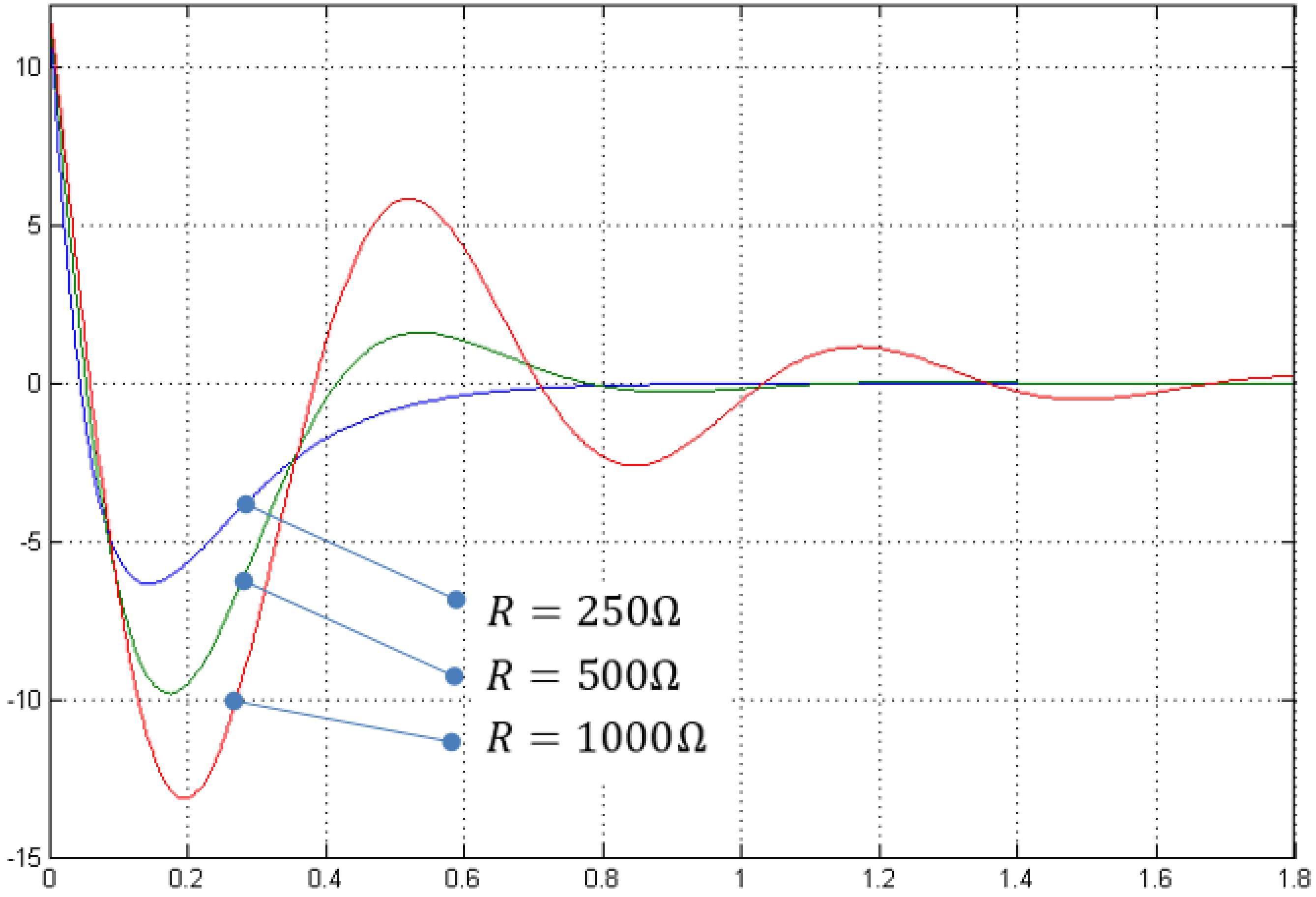
*R só pode ser positivo



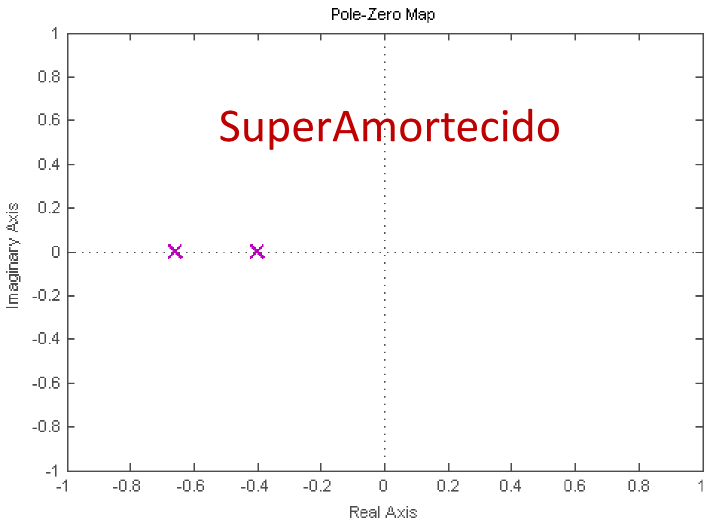
Circuitos de Segunda ordem RLC

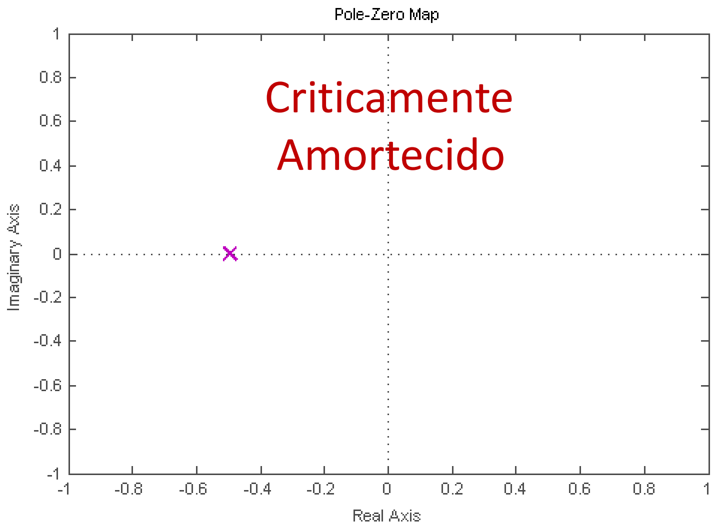
Se aumentar o valor de R acima do valor crítico, termos um sistema **subamortecido**, uma vez que a **frequência de Neper** será menor que a **frequência angular**, com isso serão necessários novos ciclos para estabilizar o sistema

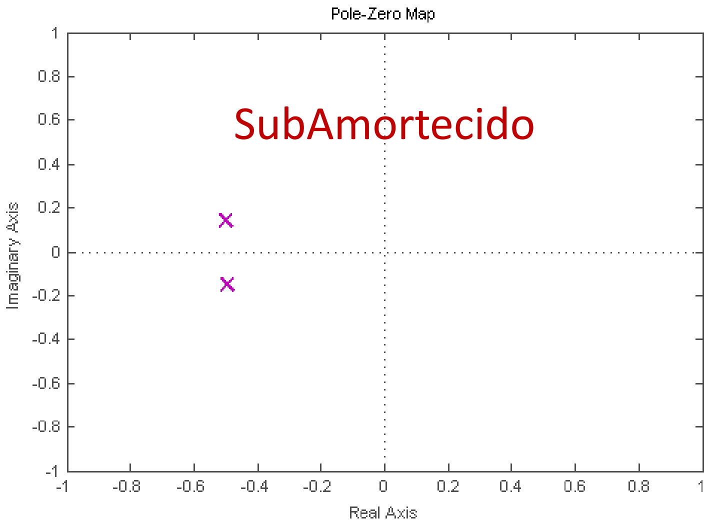
$$\alpha^2 < \omega_0^2$$



Circuitos de Segunda ordem RLC







Análise do lugar das raízes

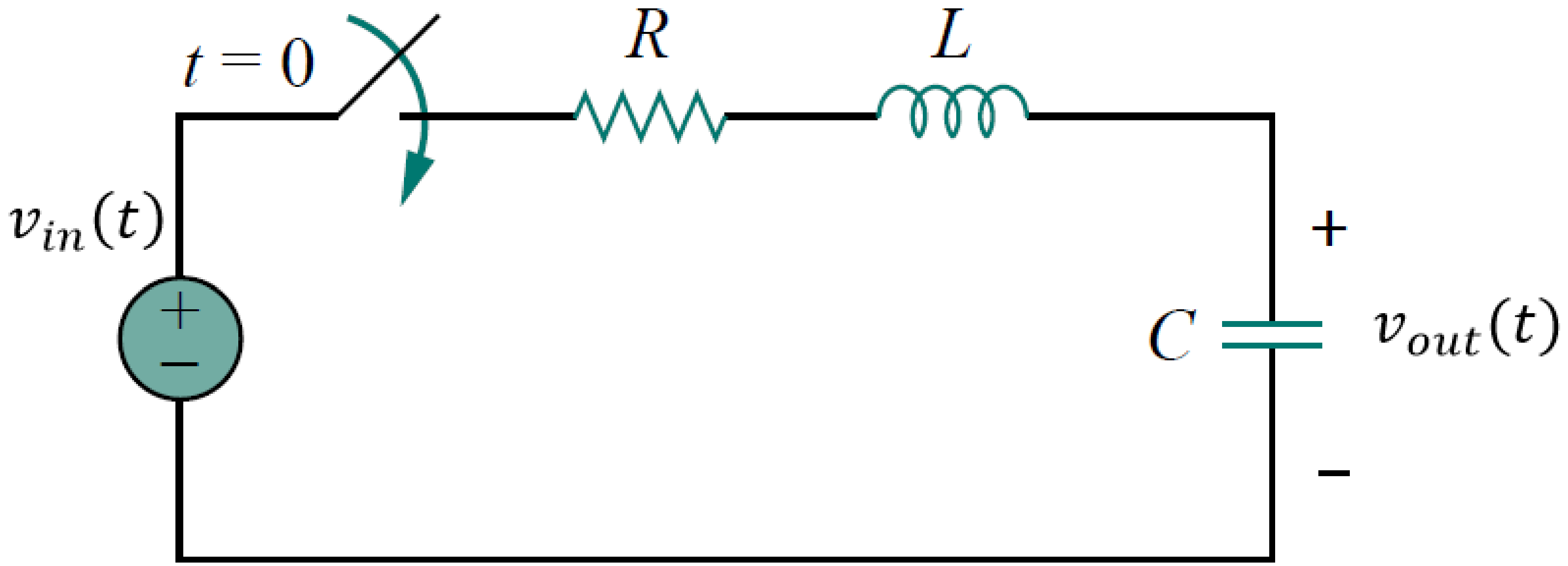
- Os polos devem ficar do lado esquerdo
- Quanto mais afastados do eixo real, maior a frequência de amortecimento
- Quanto mais próximas entre si maior a velocidade de acomodação

Tabela de respostas

Número do par	Natureza das raízes	$\boldsymbol{F(t)}$	$\boldsymbol{f(t)}$
1	Reais e distintas	$\dfrac{K}{s+\alpha}$	$Ke^{-\alpha t}\cdot u(t)$
2	Reais e repetidas	$\dfrac{K}{(s+\alpha)^2}$	$Kt\cdot e^{-\alpha t}\cdot u(t)$
3	Complexas e distintas	$\dfrac{K}{s+\alpha-j\beta}+\dfrac{K^*}{s+\alpha+j\beta}$	$2\lvert K\rvert\cdot e^{-\alpha t}\cdot\cos(\beta t+\theta)\cdot u(t)$
4	Complexas e repetidas	$\dfrac{K}{(s+\alpha-j\beta)^2}+\dfrac{K^*}{(s+\alpha+j\beta)^2}$	$2t\lvert K\rvert\cdot e^{-\alpha t}\cdot\cos(\beta t+\theta)\cdot u(t)$

Nos pares 1 e 2 K é uma quantidade real, ao passo que nos pares 3 e 4, K é a quantidade complexa $|K|\angle\theta$

Exercício: Encontre a frequência de Neper a frequência angular do circuito RLC em série. Calcule a função transferência.



Exercício: Encontre a frequência de Neper a frequência angular do circuito RLC em série. Calcule a função transferência.

$$\frac{V_o - V_i}{R + sL} + V_o \cdot sC = 0$$

$$V_o \left(\frac{1}{R + sL} + sC \right) = \frac{V_i}{R + sL}$$

$$V_o \left(\frac{1 + sRC + s^2LC}{R + sL} \right) = \frac{V_i}{R + sL}$$

$$\frac{V_o}{V_i} = H(s) = \frac{1}{1 + sRC + s^2LC}$$

$$\frac{V_o}{V_i} = H(s) = \frac{R + sL}{s^2 + s\frac{R}{L} + \frac{1}{LC}}$$

$$p_{1,2} = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$$

$$p_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

$$\boldsymbol{\alpha = \frac{R}{2L} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$$