Aula 14

Transformada de Laplace IV

Matérias que serão discutidas
Nilsson – Circuitos Elétricos
Capítulos 12, 13 e 14 – LAPLACE
Capítulo 8 – Circuitos de Segunda ordem no domínio do tempo

Circuitos Elétricos II

Prof. Henrique Amorim - UNIFESP - ICT

Circuitos de Segunda ordem RLC Paralelo

$$\alpha = \frac{1}{2RC} \quad e \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$\alpha \rightarrow Frequencia\ de\ Neper\ \ (rad/seg)$

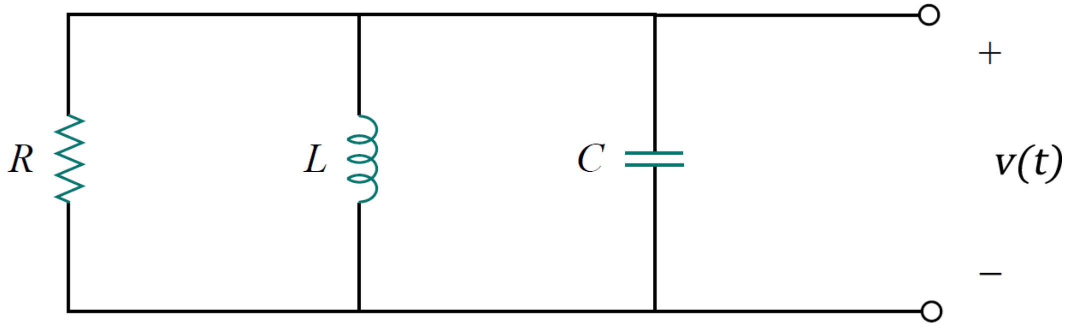
$\omega_0 \rightarrow Frequencia\ angular\ de\ ressonância\ \ (rad/seg)$

$$p_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \qquad p_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

$\alpha^2 > \omega_0^2$	**Raízes reais distintas** (Resposta superamortecida)
$\alpha^2 < \omega_0^2$	**Raízes complexas conjugadas** (Resposta subamortecida)
$\alpha^2 = \omega_0^2$	**Raízes reais e iguais** (Resposta criticamente amortecida)

Circuitos de Segunda ordem RLC

Considerando mesmo circuito RLC



$$R = X\Omega$$

$$L = 50mH$$

$$C = 0{,}2\mu F$$

$$\boldsymbol{V(s) = \frac{V_0 \cdot s - \frac{I_0}{C}}{s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC}}}$$

$$v_c(0^-) = 12V = V_0$$

$$i_L(0^-) = 30mA = I_0$$

$$s_{1,2} = -\frac{1}{2RC} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

Uma vez que os parâmetro RLC são reais e maiores que zero, o valor dos polos será sempre negativo

Circuitos de Segunda ordem RLC

A velocidade de resposta possui um valor crítico, ou seja, estaciona mais rápido quando obtemos uma resposta criticamente amortecida. A relação é encontrada quando os polos do sistema são reais e iguais:

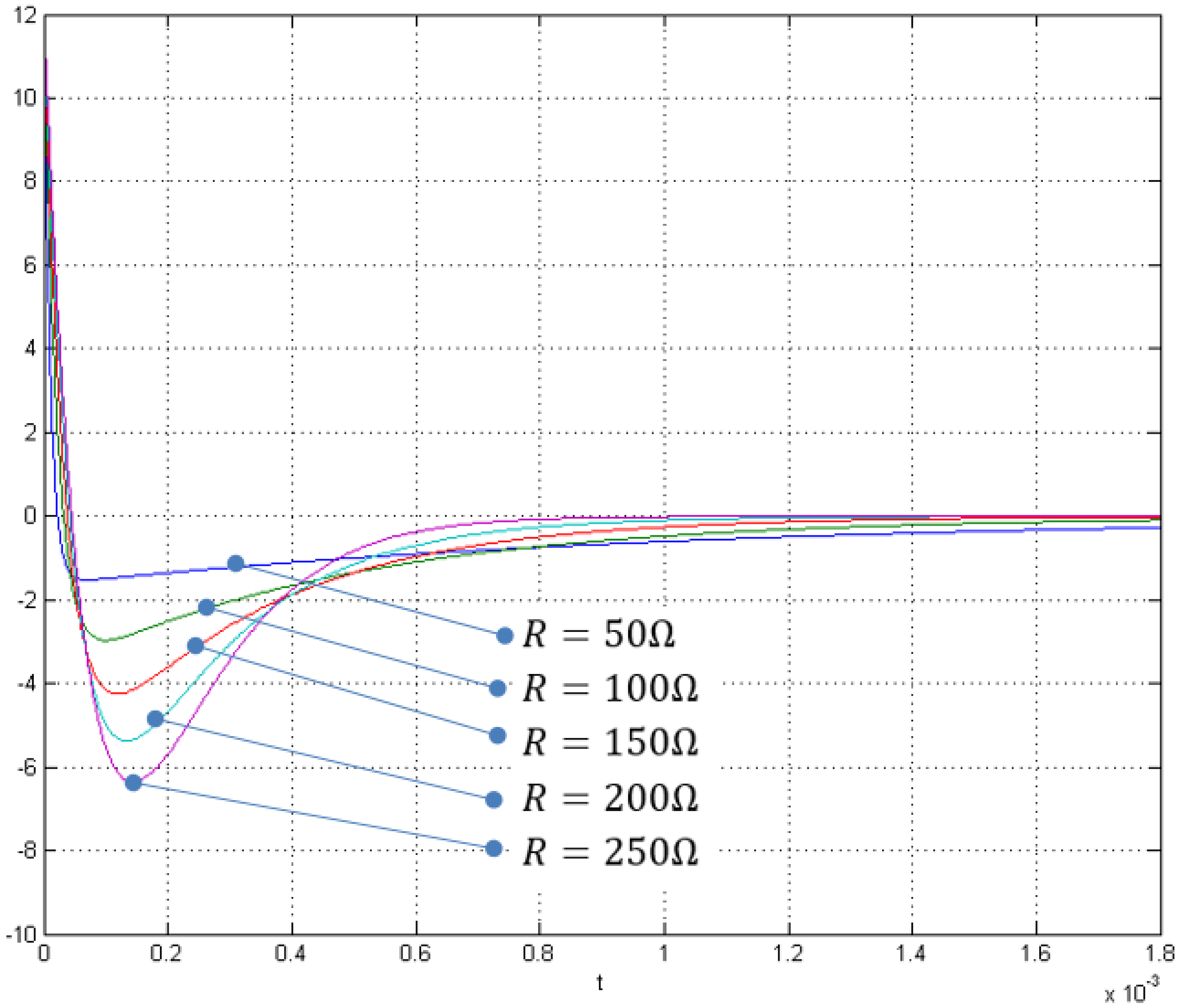
$$s_{1,2} = -\frac{1}{2RC} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

$$\alpha^2 = \omega_0^2$$

$$\left(\frac{1}{2R \cdot 0{,}2 \cdot 10^{-6}}\right)^2 = \frac{1}{50 \cdot 10^{-3} \cdot 0{,}2 \cdot 10^{-6}}$$

$$\boldsymbol{R = \pm 250\Omega}$$

*R só pode ser positivo



Circuitos de Segunda ordem RLC

Se aumentar o valor de R acima do valor crítico, termos um sistema **subamortecido**, uma vez que a **frequência de Neper** será menor que a **frequência angular**, com isso serão necessários novos ciclos para estabilizar o sistema

$$\alpha^2 < \omega_0^2$$

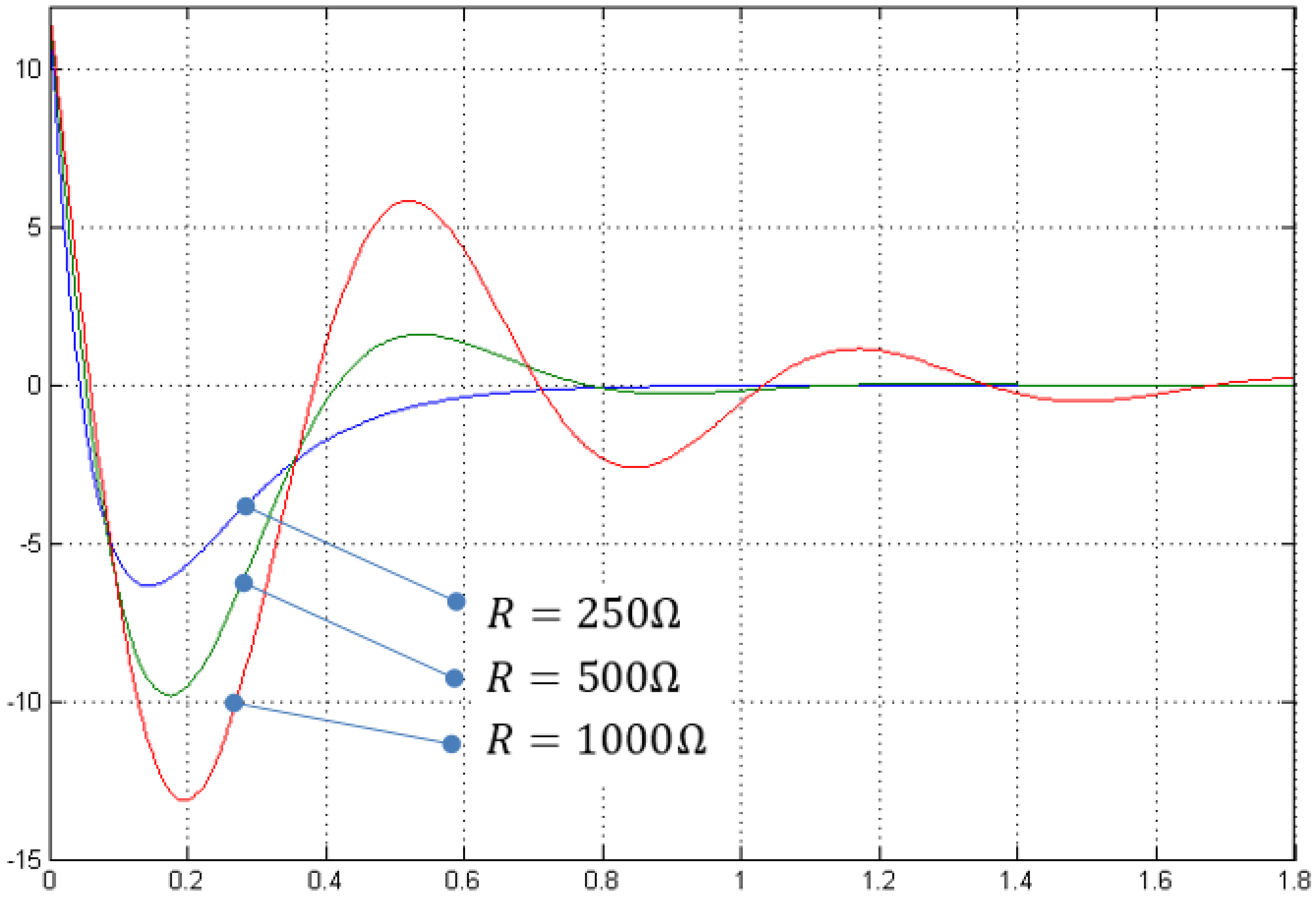


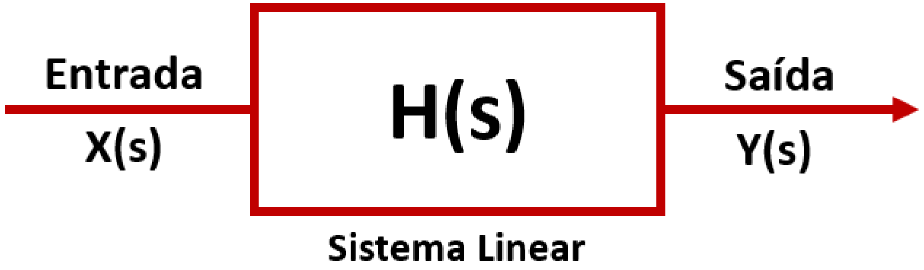
Tabela de respostas

Número do par	Natureza das raízes	$\boldsymbol{F(t)}$	$\boldsymbol{f(t)}$
1	Reais e distintas	$\dfrac{K}{s+\alpha}$	$Ke^{-\alpha t}\cdot u(t)$
2	Reais e repetidas	$\dfrac{K}{(s+\alpha)^2}$	$Kt\cdot e^{-\alpha t}\cdot u(t)$
3	Complexas e distintas	$\dfrac{K}{s+\alpha-j\beta}+\dfrac{K^*}{s+\alpha+j\beta}$	$2\lvert K\rvert\cdot e^{-\alpha t}\cdot\cos(\beta t+\theta)\cdot u(t)$
4	Complexas e repetidas	$\dfrac{K}{(s+\alpha-j\beta)^2}+\dfrac{K^*}{(s+\alpha+j\beta)^2}$	$2t\lvert K\rvert\cdot e^{-\alpha t}\cdot\cos(\beta t+\theta)\cdot u(t)$

Nos pares 1 e 2 K é uma quantidade real, ao passo que nos pares 3 e 4, K é a quantidade complexa $|K|\angle\theta$

Seletores de frequência

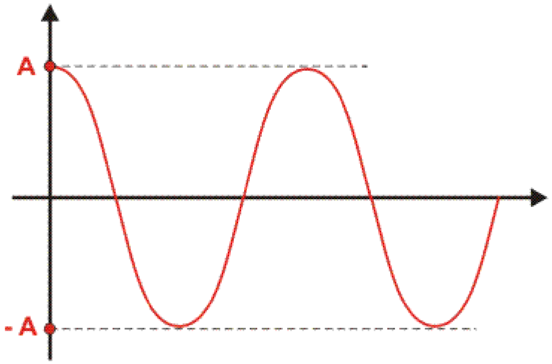
Considere um sistema com a seguinte função transferência $H(s)$...



$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

... e uma entrada senoidal. No domínio do tempo temos:

$$\boldsymbol{x(t) = A \cdot \cos(\omega t + \phi)}$$



Sabemos que:

$$\mathcal{L}[x(t)] = X(s)$$

$$\boldsymbol{X(s) = \frac{A \cdot (s \cdot \cos\phi \; - \omega \cdot sen\, \phi)}{s^2 + \omega^2}}$$

Portanto:

$$\boldsymbol{Y(s) = H(s) \cdot \frac{A \cdot (s \cdot \cos\phi \; - \omega \cdot sen\, \phi)}{s^2 + \omega^2}}$$

Seletores de frequência

Esta resposta possui **dois polos complexos conjugados** relacionados a **entrada senoidal** e mais **N polos** referentes a **função transferência**

$$Y(s) = H(s) \cdot \frac{A \cdot (s \cdot cos\,\phi\; - \omega \cdot sen\,\phi)}{s^2 + \omega^2}$$

Expandindo em frações parciais temos:

$$\boldsymbol{Y(S) = \frac{K_1}{s - j\omega} + \frac{K_1^*}{s + j\omega} + \sum dos\ termos\ gerados\ por\ H(s)}$$

Para K_1 temos:

$$K_1 = H(s) \cdot \frac{A \cdot (s \cdot cos\,\phi - \omega \cdot sen\,\phi)}{s + j\omega}\Bigg|_{s\,=\,j\omega} \quad \therefore \quad K_1 = H(j\omega) \cdot \frac{A \cdot (j\omega \cdot cos\,\phi - \omega \cdot sen\,\phi)}{2j\omega}$$

Seletores de frequência

Evidenciando ω multiplicando numerador e denominador por $-j\ (1/j)$

$$K_1 = H(j\omega) \cdot \frac{A \cdot (j\omega \cdot cos\,\phi - \omega \cdot sen\,\phi)}{2j\omega}$$

Temos:

$$K_1 = H(j\omega) \cdot \frac{A \cdot (cos\,\phi + j \cdot sen\,\phi)}{2} \quad \Rightarrow$$

Pela identidade de Euler:

$$K_1 = \frac{A}{2} H(j\omega) \cdot e^{j\phi}$$

$H(j\omega)$ é função no domínio de Laplace que pode ser expressa na sua forma exponencial:

$$\boldsymbol{H(j\omega) = |H(j\omega)| e^{j \cdot \theta(\omega)}}$$

Onde:

$$\theta(\omega) = atg\left(\frac{\Im(H(j\omega))}{\Re(H(j\omega))}\right)$$

Clareando

$$x + jy = M \cdot e^{j\phi} \quad onde \quad M = |x + jy| \quad e \quad \phi = atg\left(\frac{y}{x}\right) = atg\left(\frac{\Im(x + yj)}{\Re(x + yj)}\right)$$

Seletores de frequência

Temos:

$$K_1 = \frac{A}{2} H(j\omega) \cdot e^{j\phi} \qquad H(j\omega) = |H(j\omega)| e^{j\cdot\theta(\omega)}$$

Onde: $\theta(\omega) = atg\left(\frac{\Im(H(j\omega))}{\Re(H(j\omega))}\right)$

Portanto:

$$\boldsymbol{K_1 = \frac{A}{2} |H(j\omega)| \cdot e^{j(\theta(\omega)+\phi)}}$$

$$\left(K_1 = H(s) \cdot \frac{A \cdot (s \cdot cos\,\phi - \omega \cdot sen\,\phi)}{s + j\omega}\bigg|_{s = j\omega} \right)$$

Sabemos que:

$$\frac{K}{s + \alpha - j\beta} + \frac{K^*}{s + \alpha + j\beta} \quad \rightarrow \quad 2|K|e^{-\alpha t} \cdot \cos(\beta t + \phi)$$

Assim:

$$\boxed{\boldsymbol{y_{rp}\,(t) = A|H(j\omega)|cos(\omega t + \phi + \theta(\omega))}}$$

Seletores de frequência

Exercício: Considere uma fonte senoidal $x(t)$ aplicada em um sistema com a seguinte função transferência $H(s)$ abaixo, determine a resposta no domínio do tempo.

$$\boldsymbol{y_{rp}\ (t) = A|H(j\omega)|cos(\omega t + \phi + \theta(\omega))}$$

$$x(t) = 120 \cdot \cos(5000t + 30^{o})\, V$$

$$H(s) = \frac{1000(s + 5000)}{s^2 + 6000 \cdot s + 25 \cdot 10^6}$$

$$\boldsymbol{Resposta}: \boldsymbol{v_{rp}\ (t) = 20\sqrt{2}\ \ cos(5000t - 15^{o}\ )V}$$

Seletores de frequência

Exercício: Considere uma fonte senoidal $x(t)$ aplicada em um sistema com a seguinte função transferência $H(s)$ abaixo, determine a resposta no domínio do tempo.

$$x(t) = 120 \cdot \cos(5000t + 30^o)\, V$$

$$H(s) = \frac{1000(s + 5000)}{s^2 + 6000 \cdot s + 25 \cdot 10^6}$$

$$\omega = 5000 \qquad \phi = 30^o \qquad A = 120$$

$$H(j\omega) = \frac{1000(5000j + 5000)}{(5000j)^2 + 6000 \cdot (5000j) + 25 \cdot 10^6} = \frac{1}{6} - \frac{j}{6} = \frac{\sqrt{2}}{6} \angle -45^o$$

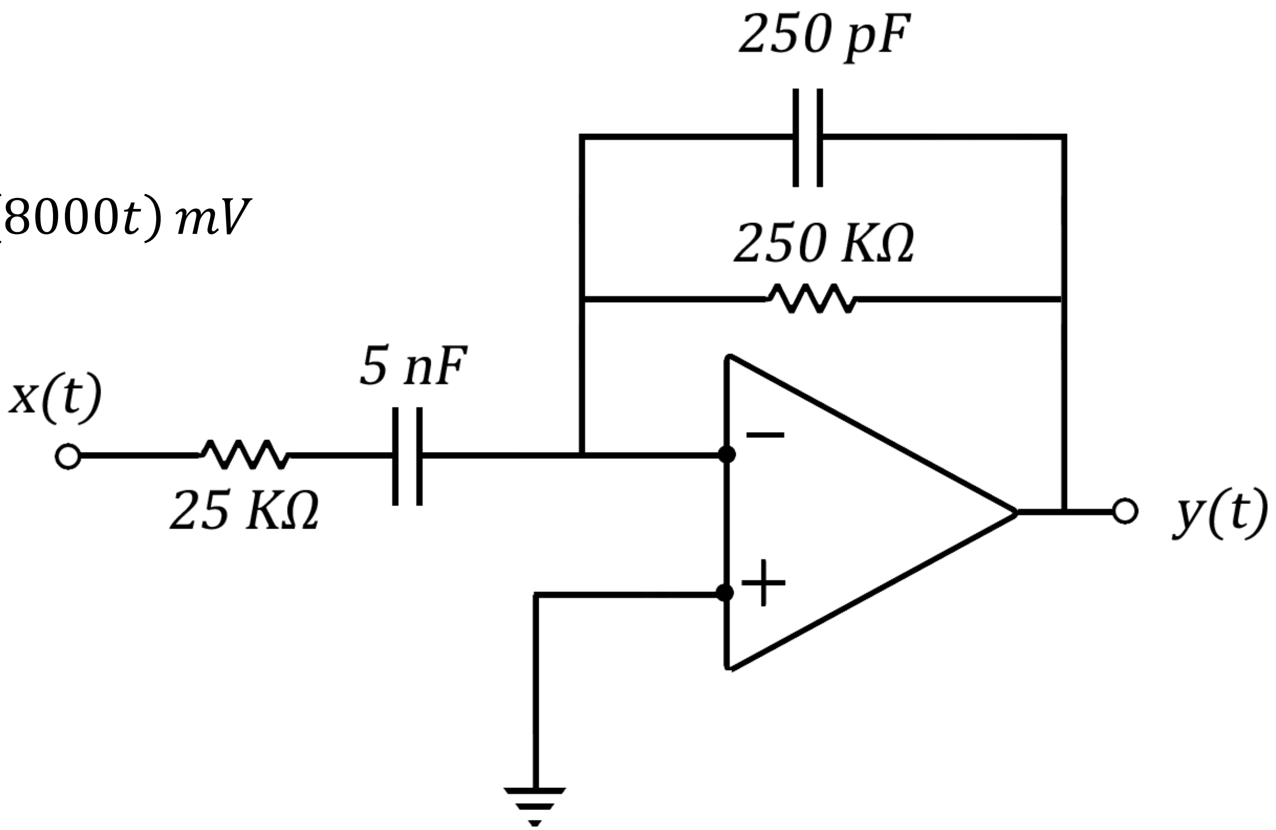
$$y_{rp}\,(t) = A|H(j\omega)| cos(\omega t + \phi + \theta(\omega))$$

$$\boldsymbol{y_{rp}\,(t) = \frac{120}{6} \cdot \sqrt{2} \cdot cos(5000t + 30^o - 45^o) = 20\sqrt{2} \cdot cos(5000t - 15^o)}$$

Seletores de frequência

Exercício: O amplificador operacional é ideal e está operando na região linear. Calcule a saída de regime permanente $y(t)$ V.

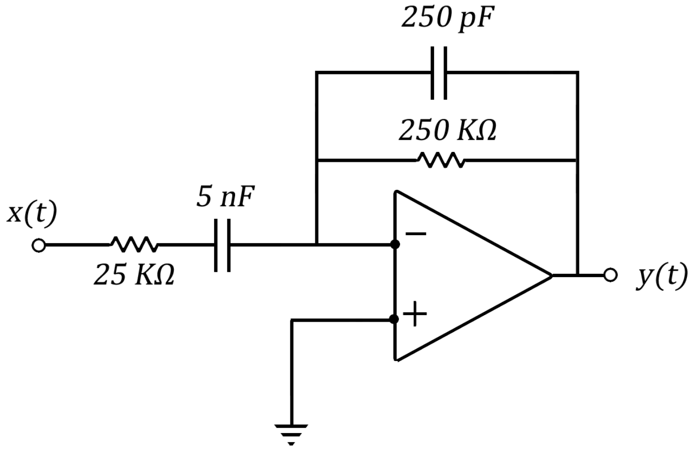
$$x(t) = 200\sqrt{10} \cdot \cos(8000t)\, mV$$



$$Resposta:\ \ y(t) = 4 \cdot cos(8000t - 161{,}57)\, V$$

Seletores de frequência

Exercício: O amplificador operacional é ideal e está operando na região linear. Calcule a saída de regime permanente $y(t)$ V.



$$Z_f = C_f || R_f$$

$$Z_s = C_s + R_s$$

$$C_f(s) = \frac{1}{250 \cdot 10^{-12} \cdot s} = \frac{4 \cdot 10^9}{s}$$

$$R_f(s) = 250 \cdot 10^3$$

$$C_s(s) = \frac{1}{5 \cdot 10^{-9} \cdot s} = \frac{0{,}2 \cdot 10^9}{s}$$

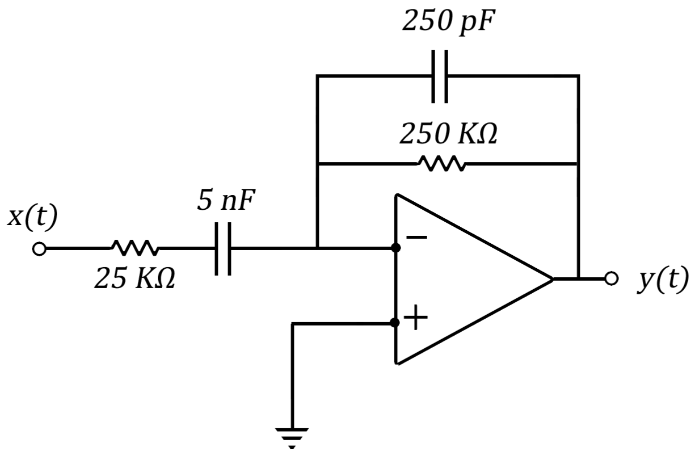
$$R_s(s) = 25 \cdot 10^3$$

$$Y(s) = -\frac{Z_f}{Z_s} \cdot X(s)$$

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = H(s) = -\frac{Z_f}{Z_s}$$

Exercício: O amplificador operacional é ideal e está operando na região linear. Calcule a saída de regime permanente $y(t)$ V.

$$H(s) = -\frac{Z_f}{Z_s} = -Z_f \cdot \frac{1}{Z_s}$$



$$Z_s = \frac{0{,}2 \cdot 10^9 + 25 \cdot 10^3 s}{s}$$

$$\frac{1}{Z_s} = \frac{s}{0{,}2 \cdot 10^9 + 25 \cdot 10^3 s} = \frac{40 \cdot 10^{-6} s}{s + 8000}$$

$$Z_f = \frac{\dfrac{4 \cdot 10^9 \cdot 250 \cdot 10^3}{s}}{\dfrac{4 \cdot 10^9}{s} + 250 \cdot 10^3} = \frac{\dfrac{4 \cdot 10^9 \cdot 250 \cdot 10^3}{s}}{\dfrac{4 \cdot 10^9 + 250 \cdot 10^3 s}{s}}$$

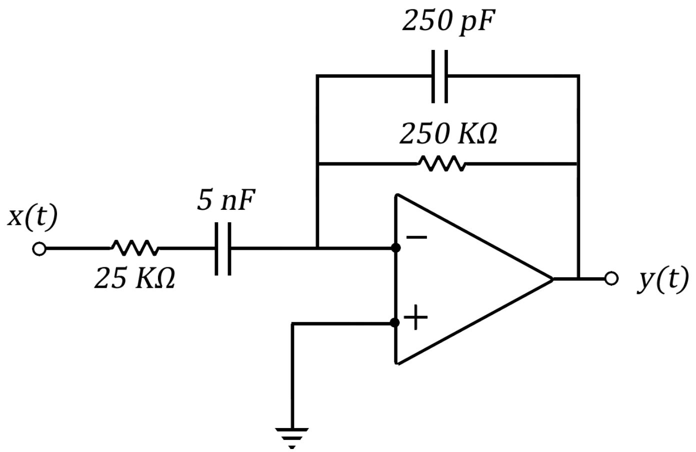
$$Z_f = \frac{1000 \cdot 10^{12}}{4 \cdot 10^9 + 250 \cdot 10^3 s} = \frac{4 \cdot 10^9}{16000 + s}$$

$$H(s) = -\left(\frac{4 \cdot 10^9}{s + 16000}\right) \cdot \left(\frac{40 \cdot 10^{-6} s}{s + 8000}\right)$$

Seletores de frequência

Exercício: O amplificador operacional (filtro ativo de segunda ordem passa faixa) é ideal e está operando na região linear. Calcule a saída de regime permanente $y(t)$ V.

$$H(s) = -\frac{Z_f}{Z_s} = -Z_f \cdot \frac{1}{Z_s}$$



$$x(t) = 200\sqrt{10} \cdot \cos(8000t)\, mV$$

$$\boldsymbol{A = 200\sqrt{10} \quad \omega = 8000 \quad \phi = 0^0}$$

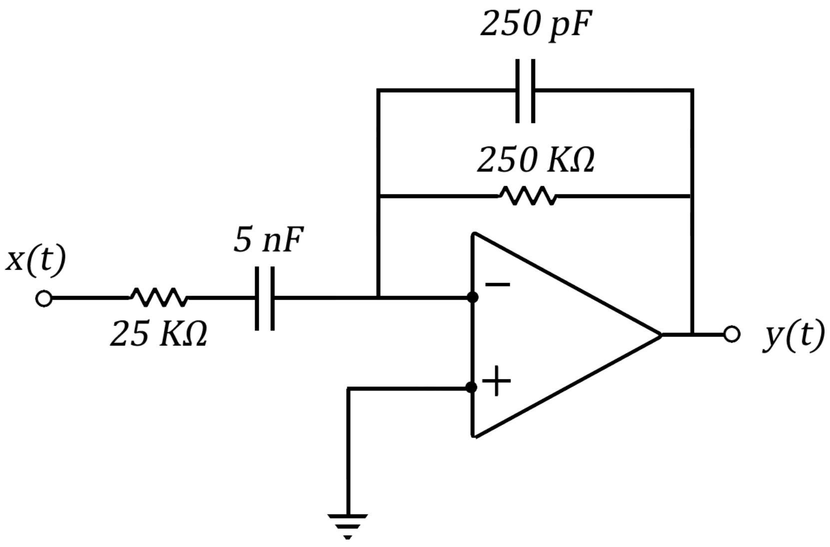
$$H(s) = -\left(\frac{4 \cdot 10^9}{s + 16000}\right) \cdot \left(\frac{40 \cdot 10^{-6} s}{s + 8000}\right)$$

$$H(s) = -\frac{160 \cdot 10^3 s}{(s + 16000)(s + 8000)}$$

$$H(j8000) = -\frac{160 \cdot 10^3 (j8000)}{(j8000 + 16000)(j8000 + 8000)}$$

$$\boldsymbol{H(j8000) = \sqrt{40}\angle -161{,}57^o}$$

Exercício: O amplificador operacional é ideal e está operando na região linear. Calcule a saída de regime permanente $y(t)$ V.



$$A = 200\sqrt{10} \quad \omega = 8000 \quad \phi = 0^0$$

$$H(j8000) = \sqrt{40}\angle -161{,}57^o$$

$$y_{rp}\,(t) = A|H(j\omega)|cos(\omega t + \phi + \theta(\omega))$$

$$y(t) = 200\sqrt{10} \cdot \sqrt{40} \cdot cos(8000t + 0 - 161{,}57) \cdot 10^{-3}$$

$$\boldsymbol{y(t) = 4 \cdot cos(8000t - 161{,}57)\, V}$$