Aula 16

Seletores de frequência II

Matérias que serão discutidas
Nilsson – Circuitos Elétricos
Capítulos 12, 13 e 14 – LAPLACE
Capítulo 8 – Circuitos de Segunda ordem no domínio do tempo

Circuitos Elétricos II

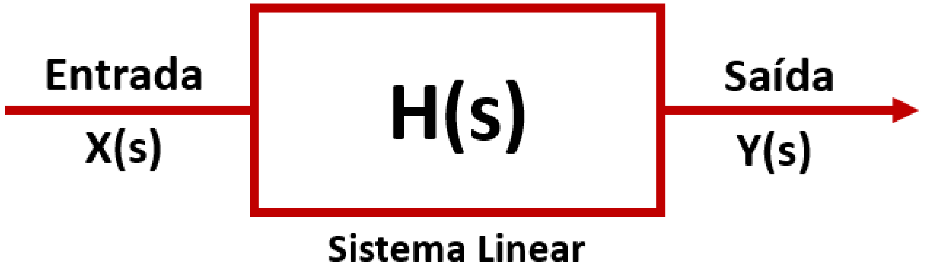
Prof. Henrique Amorim - UNIFESP - ICT

Tabela de respostas

Número do par	**Natureza das raízes**	$\boldsymbol{F(t)}$	$\boldsymbol{f(t)}$
1	Reais e distintas	$\frac{K}{s+\alpha}$	$Ke^{-\alpha t} \cdot u(t)$
2	Reais e repetidas	$\frac{K}{(s+\alpha)^2}$	$Kt \cdot e^{-\alpha t} \cdot u(t)$
3	Complexas e distintas	$\frac{K}{s+\alpha-j\beta} + \frac{K^*}{s+\alpha+j\beta}$	$2\lvert K\rvert \cdot e^{-\alpha t} \cdot \cos(\beta t+\theta) \cdot u(t)$
4	Complexas e repetidas	$\frac{K}{(s+\alpha-j\beta)^2} + \frac{K^*}{(s+\alpha+j\beta)^2}$	$2t\lvert K\rvert \cdot e^{-\alpha t} \cdot \cos(\beta t+\theta) \cdot u(t)$
Nos pares 1 e 2 K é uma quantidade real, ao passo que nos pares 3 e 4, K é a quantidade complexa $\lvert K\rvert\angle\theta$			

Seletores de frequência

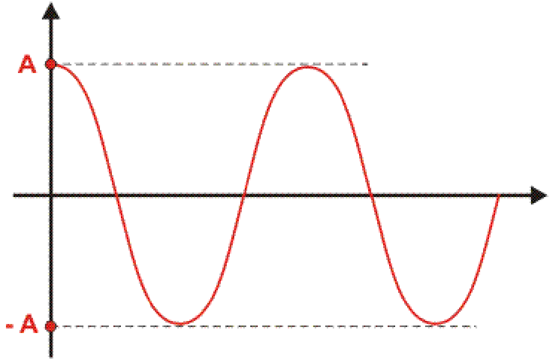
Considere um sistema com a seguinte função transferência $H(s)$...



$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

... e uma entrada senoidal. No domínio do tempo temos:

$$\boldsymbol{x(t) = A \cdot \cos(\omega t + \phi)}$$



Sabemos que:

$$\mathcal{L}[x(t)] = X(s)$$

$$\boldsymbol{X(s) = \frac{A \cdot (s \cdot cos\, \phi \ - \omega \cdot sen\, \phi)}{s^2 + \omega^2}}$$

Portanto:

$$\boldsymbol{Y(s) = H(s) \cdot \frac{A \cdot (s \cdot cos\, \phi \ - \omega \cdot sen\, \phi)}{s^2 + \omega^2}}$$

Seletores de frequência

Esta resposta possui **dois polos complexos conjugados** relacionados a **entrada senoidal** e mais **N polos** referentes a **função transferência**

$$Y(s) = H(s) \cdot \frac{A \cdot (s \cdot cos\,\phi \; - \omega \cdot sen\,\phi)}{s^2 + \omega^2}$$

Expandindo em frações parciais temos:

$$\boldsymbol{Y(S) = \frac{K_1}{s - j\omega} + \frac{K_1^*}{s + j\omega} + \sum dos\ termos\ gerados\ por\ H(s)}$$

Para K_1 temos:

$$K_1 = H(s) \cdot \frac{A \cdot (s \cdot cos\,\phi - \omega \cdot sen\,\phi)}{s + j\omega}\Bigg|_{s = j\omega} \quad \therefore \quad K_1 = H(j\omega) \cdot \frac{A \cdot (j\omega \cdot cos\,\phi - \omega \cdot sen\,\phi)}{2j\omega}$$

Seletores de frequência

Evidenciando ω multiplicando numerador e denominador por $-j$ $(1/j)$

$$K_1 = H(j\omega) \cdot \frac{A \cdot (j\omega \cdot cos\,\phi - \omega \cdot sen\,\phi)}{2j\omega}$$

Temos:

$$K_1 = H(j\omega) \cdot \frac{A \cdot (cos\,\phi + j \cdot sen\,\phi)}{2}$$

$\Rightarrow$

Pela identidade de Euler:

$$K_1 = \frac{A}{2} H(j\omega) \cdot e^{j\phi}$$

$H(j\omega)$ é função no domínio de Laplace que pode ser expressa na sua forma exponencial:

$$\boldsymbol{H(j\omega) = |H(j\omega)| e^{j \cdot \theta(\omega)}}$$

Onde:

$$\theta(\omega) = atg\left(\frac{\Im(H(j\omega))}{\Re(H(j\omega))}\right)$$

Clareando

$$x + jy = M \cdot e^{j\phi} \quad onde \quad M = |x + jy| \quad e \quad \phi = atg\left(\frac{y}{x}\right) = atg\left(\frac{\Im(x + yj)}{\Re(x + yj)}\right)$$

Seletores de frequência

Temos:

$$K_1 = \frac{A}{2} H(j\omega) \cdot e^{j\phi} \qquad H(j\omega) = |H(j\omega)| e^{j \cdot \theta(\omega)}$$

Onde: $$\theta(\omega) = atg\left(\frac{\Im(H(j\omega))}{\Re(H(j\omega))}\right)$$

Portanto:

$$\boldsymbol{K_1 = \frac{A}{2} |H(j\omega)| \cdot e^{j(\theta(\omega)+\phi)}} \qquad \left(K_1 = H(s) \cdot \frac{A \cdot (s \cdot cos\,\phi - \omega \cdot sen\,\phi)}{s + j\omega} \bigg|_{s = j\omega} \right)$$

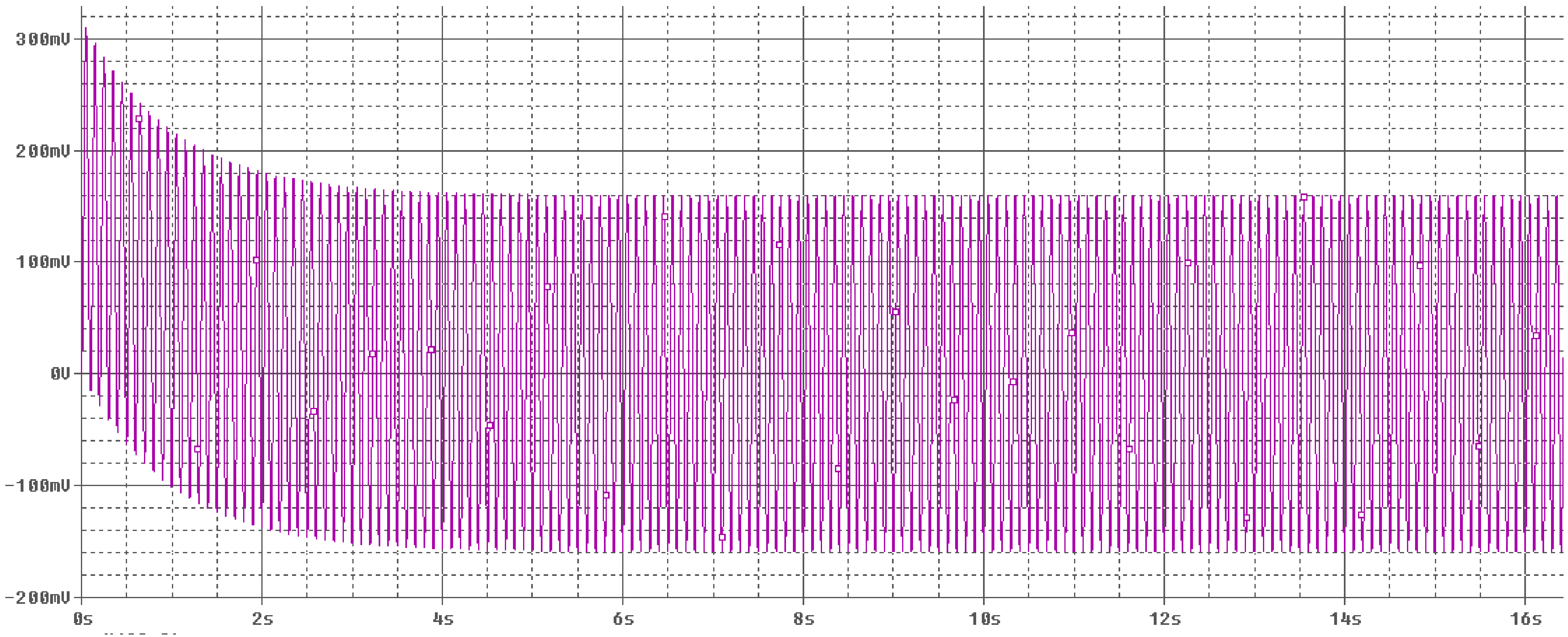
Sabemos que:

$$\frac{K}{s + \alpha - j\beta} + \frac{K^*}{s + \alpha + j\beta} \quad \rightarrow \quad 2|K| e^{-\alpha t} \cdot \cos(\beta t + \phi)$$

Assim:

$$\boldsymbol{y_{rp}(t) = A|H(j\omega)| cos(\omega t + \phi + \theta(\omega))}$$

Seletores de frequência



Os termos relacionados a função transferência refletem o comportamento transiente da resposta. Como a análise é definida para o regimento permanente, consideramos que $t \to \infty$, assim a resposta transiente tende a **zero.**

Frequência de corte

A frequência de corte é definida pela razão:

$$|H(j\omega_c)| = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot H_{max}$$

A constante H_{max} é interpretada como a amplitude máxima da função transferência, para os filtros passa baixas H_{max} corresponde a $H(j0) = 1$ e para os filtros passa altas o H_{max} corresponde a $H(j\infty)=1$, ou seja, para calcularmos a frequência de corte, tanto para passa baixas como passa altas, consideramos $H_{max} = 1$.

Frequência de corte

Para a configuração RC (passa baixas) a função transferência é:

$$H(s) = \frac{\frac{1}{RC}}{s + \frac{1}{RC}}$$

obs.: se a configuração da função transferência for de um filtro passa altas, a frequência de corte será a mesma

$$H(j\omega_c) = \frac{\frac{1}{RC}}{j\omega_c + \frac{1}{RC}}$$

$$|H(j\omega_c)| = \frac{\frac{1}{RC}}{\sqrt{\omega_c^2 + \left(\frac{1}{RC}\right)^2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\frac{1}{RC}}{\sqrt{\omega_c^2 + \left(\frac{1}{RC}\right)^2}}$$

$$\sqrt{\omega_c^2 + \left(\frac{1}{RC}\right)^2} = \left(\frac{1}{RC}\right) \cdot \sqrt{2}$$

$$\omega_c^2 + \left(\frac{1}{RC}\right)^2 = \left(\frac{1}{RC}\right)^2 \cdot 2$$

$$\boxed{\boldsymbol{\omega_c = \frac{1}{RC}}}$$

Frequência de corte

Para a configuração RL (passa baixas) a função transferência é:

$$H(s) = \frac{\frac{R}{L}}{s + \frac{R}{L}}$$

obs.: se a configuração da função transferência for de um filtro passa altas, a frequência de corte será a mesma

$$H(j\omega_c) = \frac{\frac{R}{L}}{j\omega_c + \frac{R}{L}}$$

$$|H(j\omega_c)| = \frac{\frac{R}{L}}{\sqrt{\omega_c^2 + \left(\frac{R}{L}\right)^2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\frac{R}{L}}{\sqrt{\omega_c^2 + \left(\frac{R}{L}\right)^2}}$$

$$\sqrt{\omega_c^2 + \left(\frac{\mathrm{R}}{L}\right)^2} = \left(\frac{\mathrm{R}}{L}\right) \cdot \sqrt{2}$$

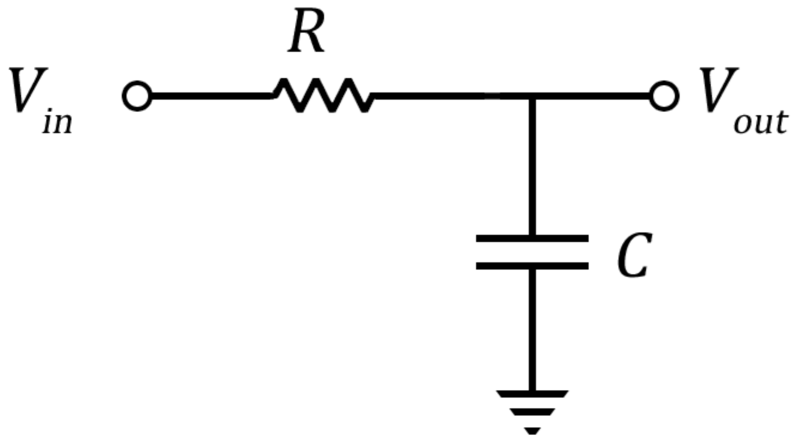
$$\omega_c^2 + \left(\frac{\mathrm{R}}{L}\right)^2 = \left(\frac{\mathrm{R}}{L}\right)^2 \cdot 2$$

$$\boxed{\boldsymbol{\omega_c = \frac{R}{L}}}$$

Seletores de frequência

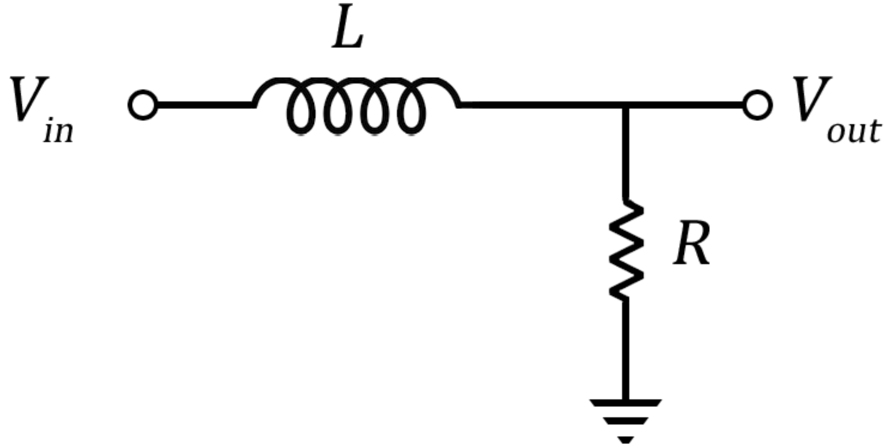
Filtro passa baixa passivo de primeira ordem

Configuração RC



$$H(s) = \frac{\frac{1}{RC}}{s + \frac{1}{RC}} = \frac{\omega_c}{s + \omega_c}$$

Configuração RL



$$H(s) = \frac{\frac{R}{L}}{s + \frac{R}{L}} = \frac{\omega_c}{s + \omega_c}$$

Seletores de frequência

Analisando a resposta em regime permanente

$$x_{rp}(t) = A\cos(wt + \phi) \qquad y_{rp}(t) = A|H(jw)|\cos(wt + \phi + \theta(w))$$

CIRCUITO RC

$\boldsymbol{Se\ \omega \to 0}$

$$H(j0) = \frac{\frac{1}{RC}}{j0 + \frac{1}{RC}} = 1$$

$$|H(j0)| = 1$$

$$y_{rp}(t) = A \cdot 1 \cdot \cos(wt + \phi + 0)$$

$$y_{rp}(t) = A \cdot \cos(wt + \phi)$$

A amplitude do sinal de saída é igual a amplitude do sinal de entrada

$\boldsymbol{Se\ \omega \to \infty}$

$$H(j\infty) = \frac{\frac{1}{RC}}{j\infty + \frac{1}{RC}} = 0$$

$$|H(j\infty)| = 0$$

$$y_{rp}(t) = A \cdot 0 \cdot \cos(wt + \phi + \theta(\omega))$$

$$y_{rp}(t) = 0 \cdot \cos(wt + \phi + \theta(\omega))$$

A amplitude do sinal de saída é zero

Seletores de frequência

Analisando a resposta em regime permanente

$$x_{rp}(t) = A\cos(wt + \phi)$$

$$y_{rp}(t) = A|H(jw)|\cos(wt + \phi + \theta(w))$$

CIRCUITO RL

$$\boldsymbol{Se\ \omega \to 0}$$

$$H(j0) = \frac{\frac{R}{L}}{j0 + \frac{R}{L}} = 1$$

$$|H(j0)| = 1$$

$$y_{rp}(t) = A \cdot 1 \cdot \cos(wt + \phi + 0)$$

$$y_{rp}(t) = A \cdot \cos(wt + \phi)$$

A amplitude do sinal de saída é igual a amplitude do sinal de entrada

$$\boldsymbol{Se\ \omega \to \infty}$$

$$H(j\infty) = \frac{\frac{\mathrm{R}}{L}}{j\infty + \frac{\mathrm{R}}{L}} = 0$$

$$|H(j\infty)| = 0$$

$$y_{rp}(t) = A \cdot 0 \cdot \cos(wt + \phi + \theta(\omega))$$

$$y_{rp}(t) = 0 \cdot \cos(wt + \phi + \theta(\omega))$$

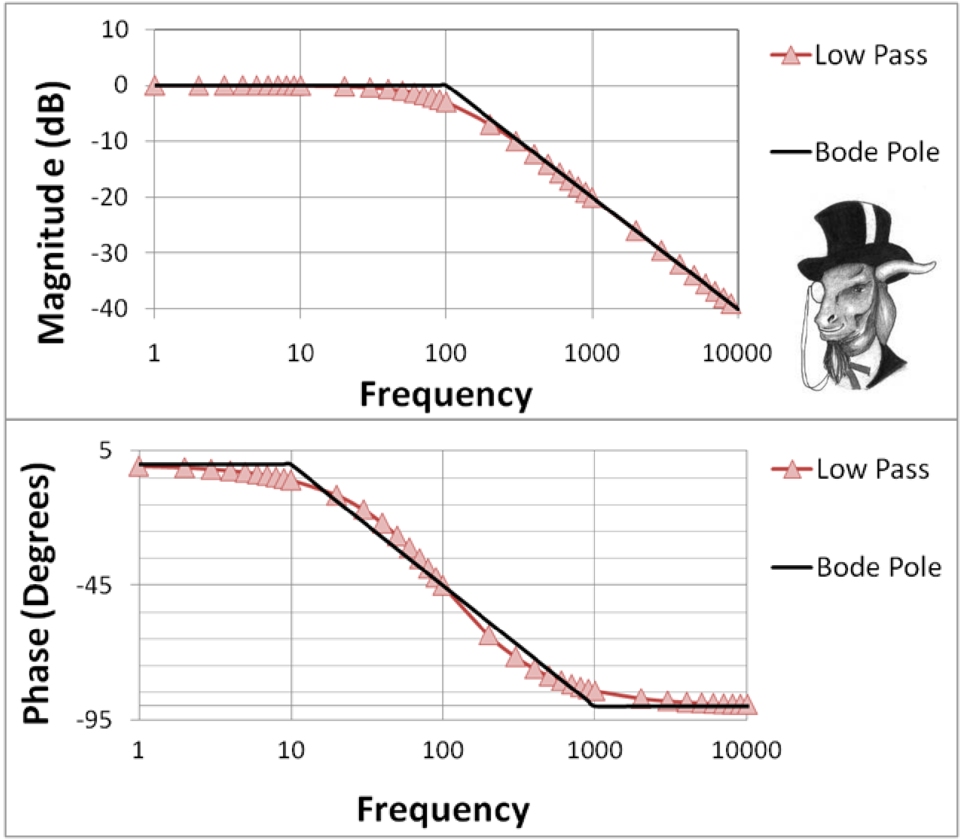
A amplitude do sinal de saída é zero

Curvas de bode

Em circuitos elétricos e em sistemas de controle , as curvas de Bode são gráficos da resposta em frequência de um sistema. Esta representação é composta por um gráfico de magnitude, geralmente em decibéis, e um gráfico de fase, expressando o deslocamento de fase. Em ambos os gráficos, a frequência é plotada em escala logarítima (décadas).

O gráfico de amplitude é do tipo **log-log plot**, enquanto o gráfico de fase é um gráfico **lin-log plot**.

Como originalmente concebido por Hendrik Wade Bode na década de 1930, o as linhas representam uma aproximação assintótica da resposta em frequência, usando segmentos de reta.



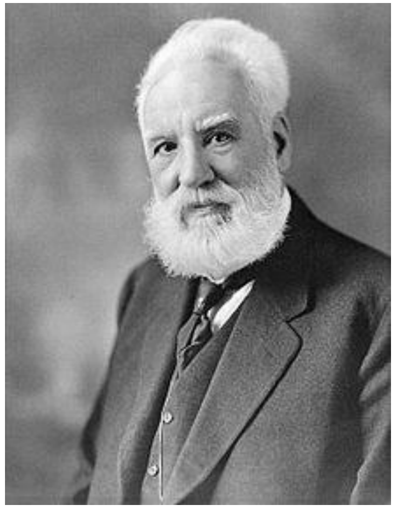
Decibel

O decibel (dB) é uma unidade logarítmica usada para expressar a razão de dois valores de uma quantidade física. Normalmente, um dos valores é um valor de referência.

O Decibel corresponde a 1 décimo do Bel (1decibel = bel/10)

A unidade Bel ou Decibel é uma homenagem ao cientista Alexander Graham Bell, inventor do telefone

Originalmente o decibel era utilizado para mensurar a perda de sinal (energia) nos circuitos de telégrafo e telefone



Decibel

Como o decibel analisa a atenuação ou ganho de energia, podemos defini-lo da seguinte forma

$$G_P = 10 \cdot \log_{10}\left(\frac{P_o}{P_i}\right)$$

Considerando o ganho de tensão ou corrente, sem alterar a impedância de saída temos:

$$G_V = 10 \cdot \log_{10}\left(\frac{\frac{V_o^2}{Z}}{\frac{V_i^2}{Z}}\right) = 10 \cdot \log_{10}\left(\left(\frac{V_o}{V_i}\right)^2\right) = 20 \cdot \log_{10}\left(\frac{V_o}{V_i}\right)$$

$$G_I = 10 \cdot \log_{10}\left(\frac{I_o^2 \cdot Z}{I_i^2 \cdot Z}\right) = 10 \cdot \log_{10}\left(\left(\frac{I_o}{I_i}\right)^2\right) = 20 \cdot \log_{10}\left(\frac{I_o}{I_i}\right)$$

Seletores de frequência

A atenuação das frequências pode ser visualizada nos gráficos abaixo

Gráfico do ganho x frequência

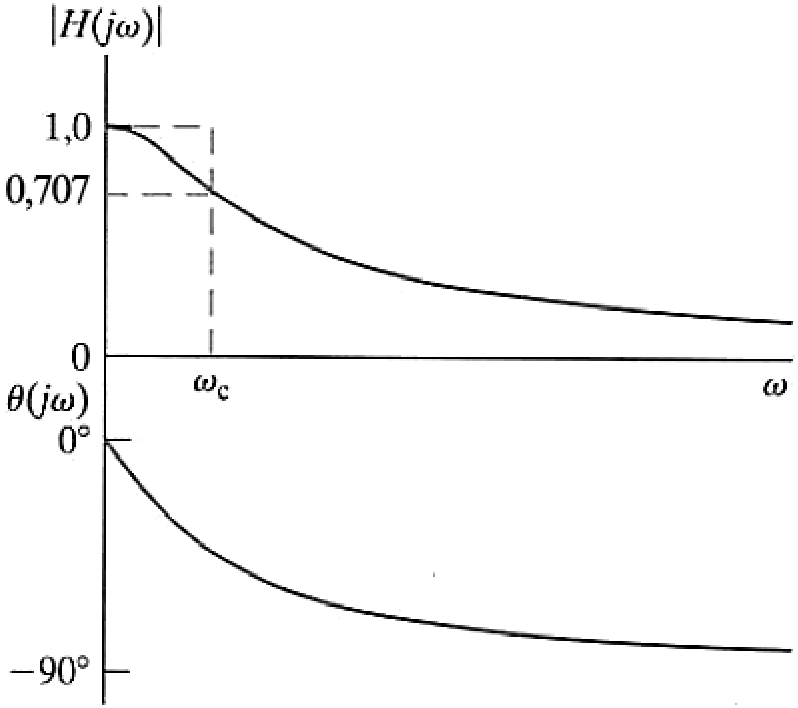
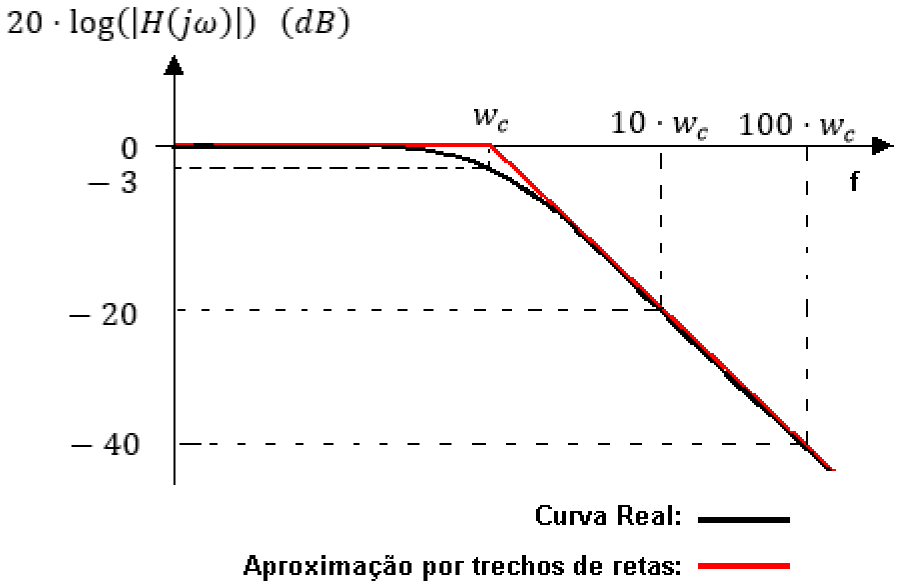


Gráfico de bode
Ganho(dB) x Frequência(log10)

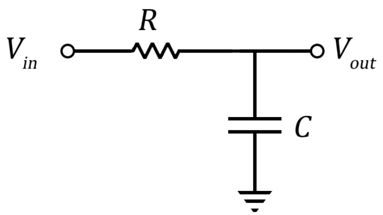


Seletores de frequência

Comportamento de um filtro passa baixas passivo (RC), gerado a partir do Matlab

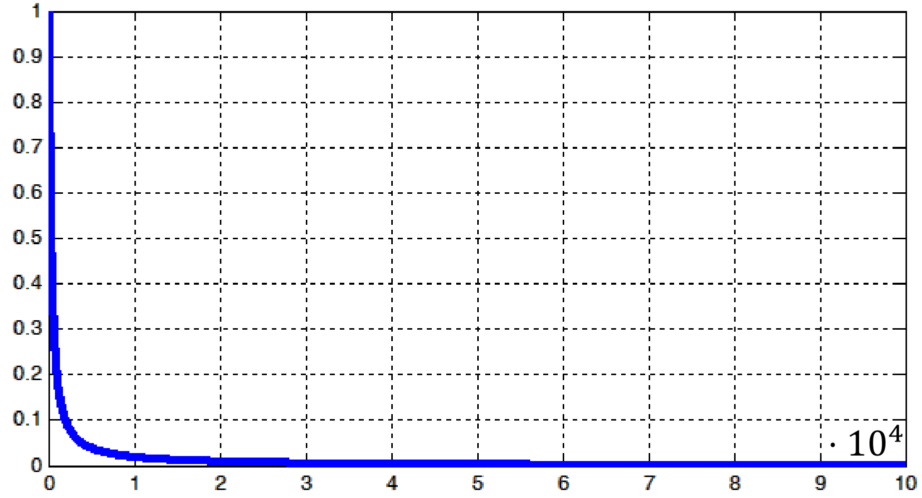
O gráfico superior está em escala linear
O gráfico inferior está em decibel (log10)

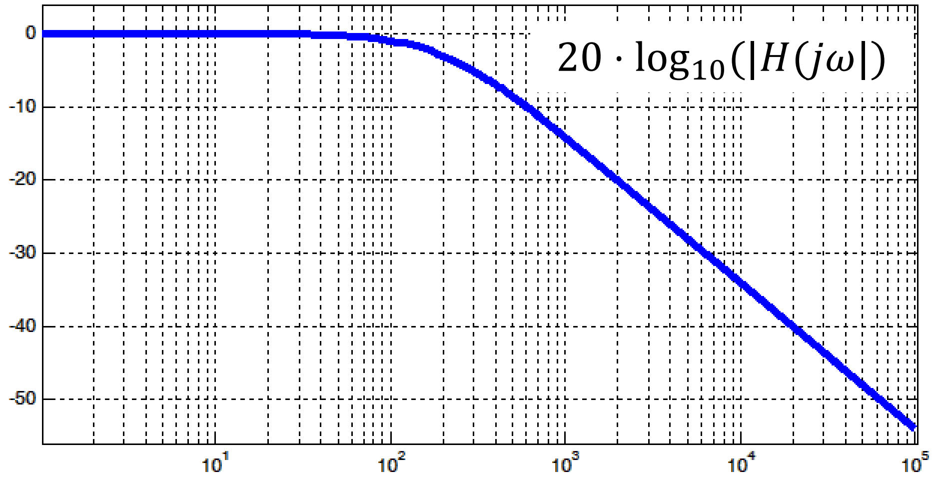
```
R = 1000;
C = 5e-6;

FC = 1/(R*C);

freqs = linspace(1,100000, 10000);
freqs_quadrado = freqs.^2;

modH = FC./sqrt(freqs_quadrado+FC^2);
dbmodH = 20*log10((modH));

figure
plot(freqs, modH,'LineWidth',4)
grid

figure
semilogx(freqs, dbmodH,'LineWidth',4)
grid
```



$$\omega_c = 200\, rad/s$$

$$|H(j\omega)| = \frac{\omega_c}{\sqrt{\omega^2 + \omega_c^2}}$$

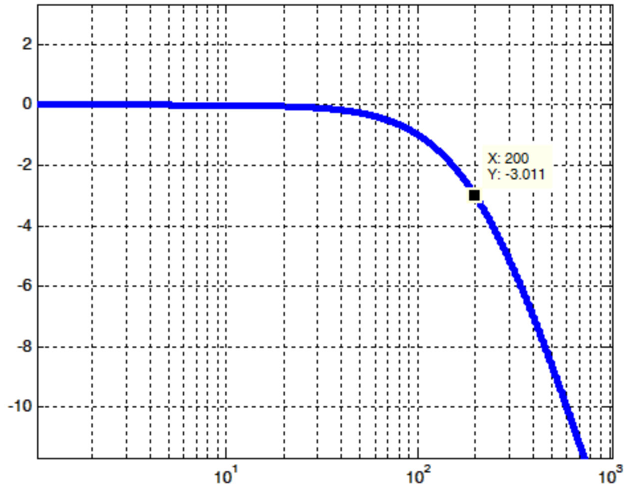


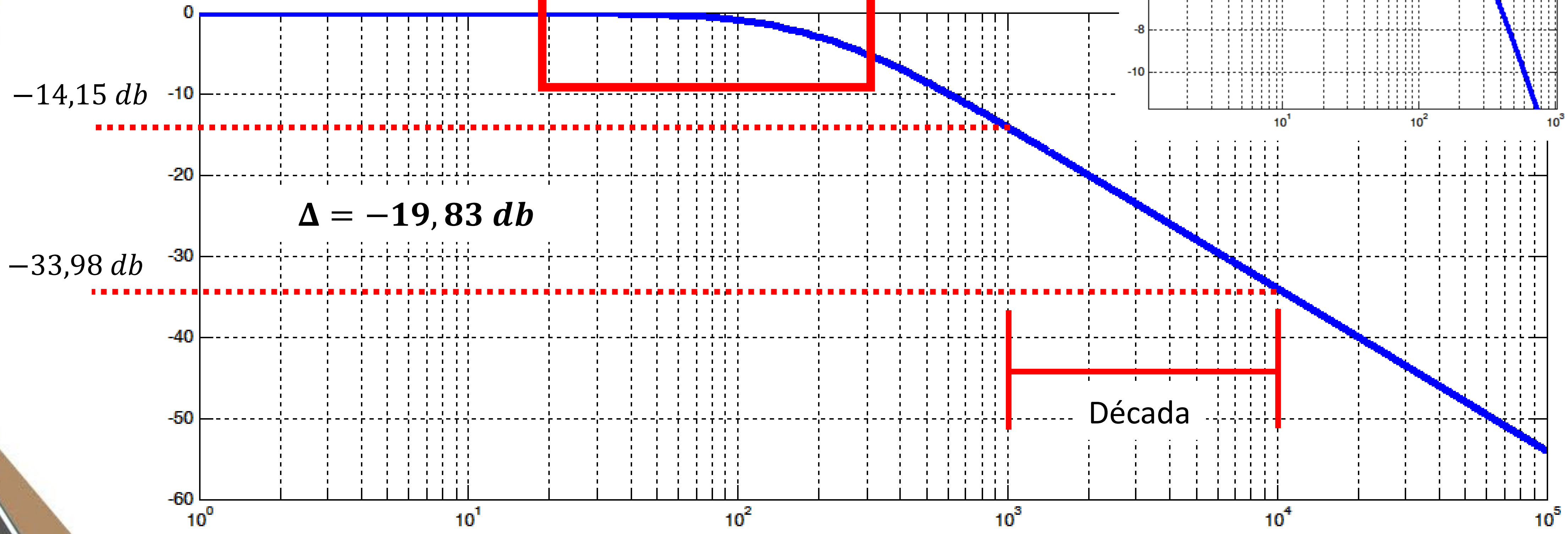


Seletores de frequência

Se $\omega = \omega_c \qquad |H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\mathbf{20 \cdot \log_{10}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\,3,01}\boldsymbol{db}$$





Seletores de frequência

Porque podemos afirmar que, passada a frequência de corte, um filtro passa baixas de primeira ordem decai 20db/década?

$$|\boldsymbol{H}(\boldsymbol{j\omega})| = \frac{\boldsymbol{\omega_c}}{\sqrt{\boldsymbol{\omega^2} + \boldsymbol{\omega_c^2}}}$$

Considerando o intervalo: $\omega_1 = 10^2\omega_c$ e $\omega_2 = 10^3\omega_c$ temos:

$$|H(j10^2\omega_c)| = \frac{\omega_c}{\sqrt{10^4\omega_c^2 + \omega_c^2}}$$

$$|H(j10^2\omega_c)| = \frac{\omega_c}{\sqrt{\omega_c^2(10^4 + 1)}}$$

$$|H(j10^2\omega_c)| \cong \frac{\omega_c}{10^2\omega_c} \cong \frac{1}{10^2}$$

$$20 \cdot \log_{10}(|H(j10^2\omega_c)|) = 20(\log_{10}(1) - \log_{10}(10^2))$$

$$20 \cdot \log_{10}(|H(j10^2\omega_c)|) = 20(0 - 2) = -40db$$

$$|H(j10^3\omega_c)| = \frac{\omega_c}{\sqrt{10^6\omega_c^2 + \omega_c^2}}$$

$$|H(j10^3\omega_c)| = \frac{\omega_c}{\sqrt{\omega_c^2(10^6 + 1)}}$$

$$|H(j10^3\omega_c)| \cong \frac{\omega_c}{10^3\omega_c} \cong \frac{1}{10^3}$$

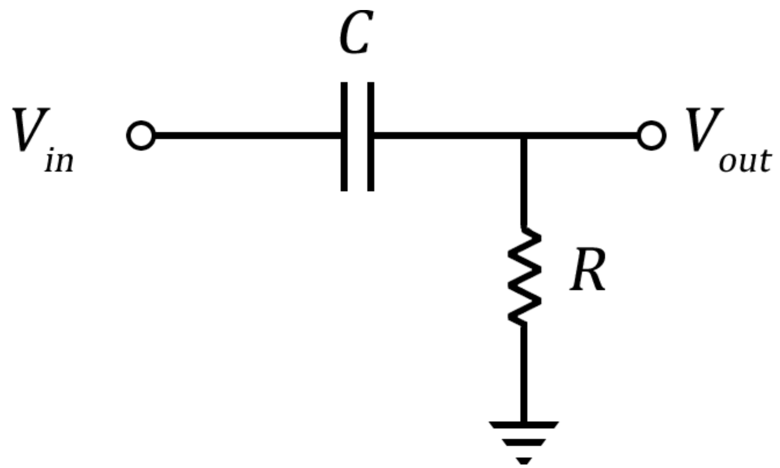
$$20 \cdot \log_{10}(|H(j10^3\omega_c)|) = 20(\log_{10}(1) - \log_{10}(10^3))$$

$$20 \cdot \log_{10}(|H(j10^3\omega_c)|) = 20(0 - 3) = -60db$$

Desta forma podemos afirmar que: Se $\omega \gg \omega_c$; o ganho decai 20bd/década

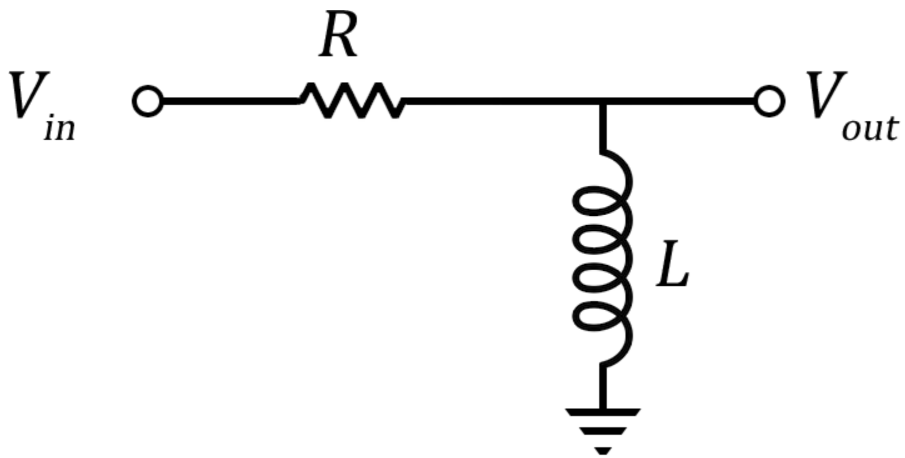
Filtro passa altas passivo de primeira ordem

Configuração RC



$$H(s) = \frac{s}{s + \frac{1}{RC}} = \frac{s}{s + \omega_c}$$

Configuração RL



$$H(s) = \frac{s}{s + \frac{R}{L}} = \frac{s}{s + \omega_c}$$

Seletores de frequência

Analisando a resposta em regime permanente

$$x_{rp}(t) = A\cos(wt + \phi)$$

$$y_{rp}(t) = A|H(jw)|\cos(wt + \phi + \theta(w))$$

CIRCUITO RC

$$\boldsymbol{Se\ \omega \to 0}$$

$$H(j0) = \frac{j0}{j0 + \frac{1}{RC}} = 0$$

$|H(j0)|$ =0

$$y_{rp}(t) = A \cdot 0 \cdot \cos(wt + \phi + \theta(\omega))$$

$$y_{rp}(t) = 0 \cdot \cos(wt + \phi + \theta(\omega))$$

A amplitude do sinal de saída é zero

$$\boldsymbol{Se\ \omega \to \infty}$$

$$H(j\infty) = \frac{j\infty}{j\infty + \frac{1}{RC}} = IND$$

$$L'Hopital \ \rightarrow \quad H(s) = \frac{1}{1} = 1$$

$$|H(j\infty)| = 1$$

$$y_{rp}(t) = A \cdot 1 \cdot \cos(wt + \phi + 0)$$

$$y_{rp}(t) = 1 \cdot \cos(wt + \phi)$$

Entrada igual a saída

Seletores de frequência

Analisando a resposta em regime permanente

$$x_{rp}(t) = A\cos(wt + \phi) \qquad y_{rp}(t) = A|H(jw)|\cos(wt + \phi + \theta(w))$$

CIRCUITO RL

$$\boldsymbol{Se\ \omega \to 0}$$

$$H(j0) = \frac{0}{0 + \frac{R}{L}} = 0$$

$$|H(j0)| = 0$$

$$y_{rp}(t) = A \cdot 0 \cdot \cos(wt + \phi + \theta(\omega))$$

$$y_{rp}(t) = 0 \cdot \cos(wt + \phi + \theta(\omega))$$

A amplitude do sinal de saída é zero

$$\boldsymbol{Se\ \omega \to \infty}$$

$$H(j\infty) = \frac{\infty}{\infty + \frac{R}{L}} = IND$$

$$L'Hopital \ \to \quad H(j\infty) = \frac{1}{1} = 1$$

$$|H(j\infty)| = 1$$

$$y_{rp}(t) = A \cdot 1 \cdot \cos(wt + \phi + 0)$$

$$y_{rp}(t) = 1 \cdot \cos(wt + \phi)$$

Entrada igual a saída

Seletores de frequência

A atenuação das frequências pode ser visualizada nos gráficos abaixo

Gráfico do ganho x frequência

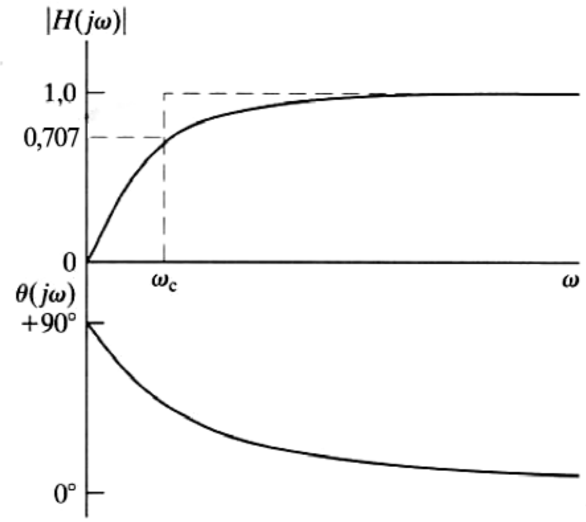
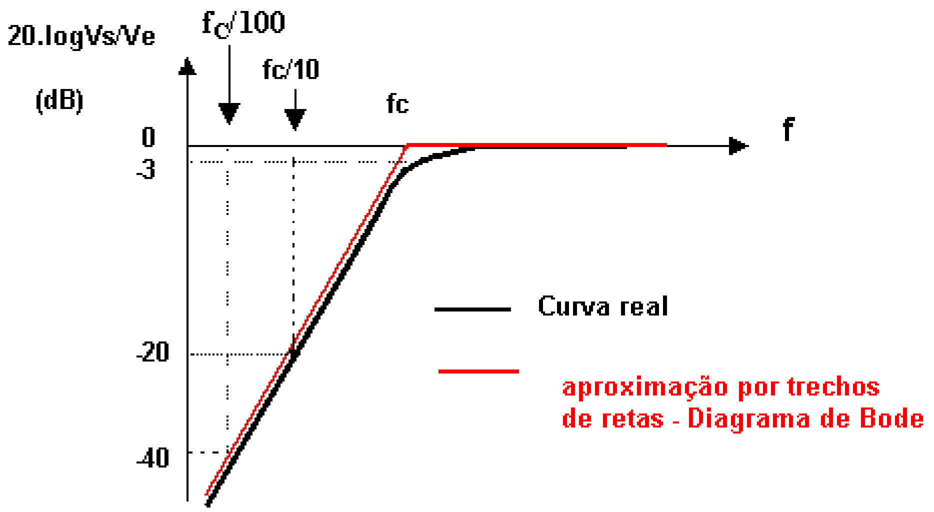


Gráfico de bode
Ganho(dB) x Frequência(log10)

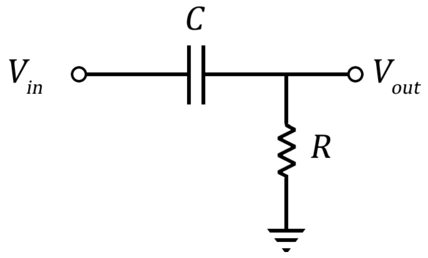


Seletores de frequência

Comportamento de um filtro passa altas passivo (RC), gerado a partir do Matlab

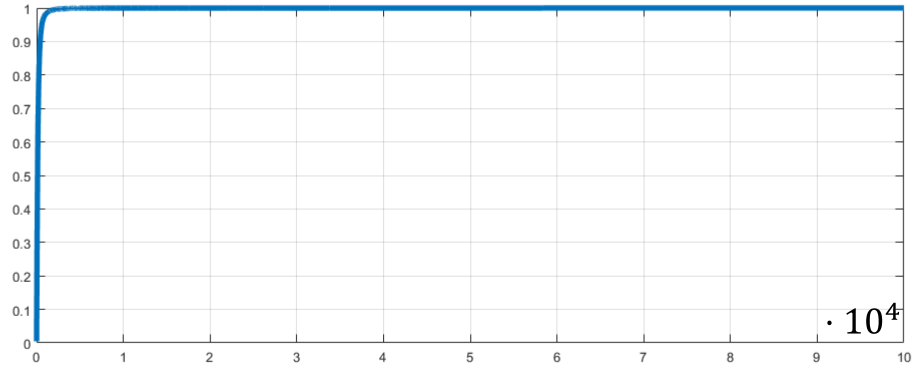
O gráfico superior está em escala linear
O gráfico inferior está em decibel (log10)

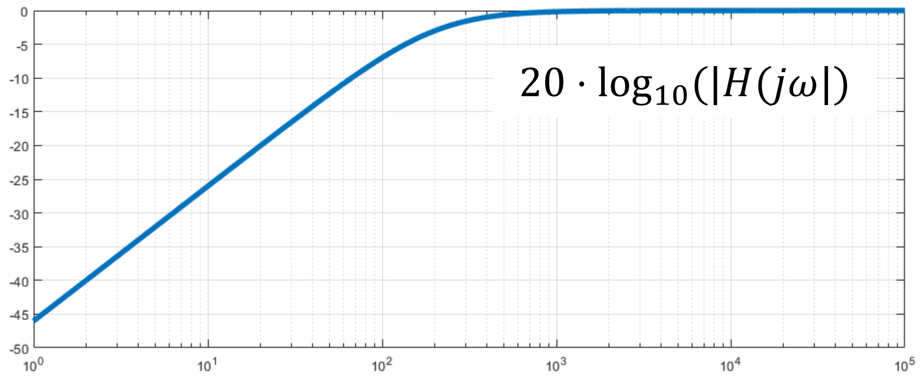
```
R = 1000;
C = 5e-6;

FC=1/(R*C);
freqs = linspace(1,100000,10000);
freqs_quadrado = freqs.^2;

modH = 1./sqrt(freqs_quadrado+FC^2);
modH = freqs.*modH;

dbmodH = 20*log10(modH);

figure
plot(freqs, modH, 'Linewidth', 4)
grid


figure
semilogx(freqs, dbmodH, 'Linewidth', 4)
grid
```



$$\omega_c = 200\, rad/s$$

$$|H(j\omega)| = \frac{\omega_c}{\sqrt{\omega^2 + \omega_c^2}}$$





Seletores de frequência

Porque podemos afirmar que, passada a frequência de corte, um filtro passa baixas de primeira ordem decai 20db/década?

$$|\boldsymbol{H(j\omega)}| = \frac{\boldsymbol{\omega}}{\sqrt{\boldsymbol{\omega^2 + \omega_c^2}}}$$

Considerando o intervalo: $\omega_1 = 10^{-3}\omega_c$ e $\omega_2 = 10^{-2}\omega_c$ temos:

$$|H(j10^{-3}\omega_c)| = \frac{10^{-3}\omega_c}{\sqrt{10^{-6}\omega_c^2 + \omega_c^2}}$$

$$|H(j10^{-3}\omega_c)| = \frac{10^{-3}\omega_c}{\sqrt{\omega_c^2(10^{-6} + 1)}}$$

$$|H(j10^{-3}\omega_c)| \cong \frac{10^{-3}\omega_c}{\omega_c} \cong 10^{-3}$$

$$20 \cdot \log_{10}(|H(j10^{-3}\omega_c)|) = 20(\log_{10}(10^{-3}))$$

$$20 \cdot \log_{10}(|H(j10^{-3}\omega_c)|) = -60db$$

$$|H(j10^{-2}\omega_c)| = \frac{10^{-2}\omega_c}{\sqrt{10^{-4}\omega_c^2 + \omega_c^2}}$$

$$|H(j10^{-2}\omega_c)| = \frac{10^{-2}\omega_c}{\sqrt{\omega_c^2(10^{-4} + 1)}}$$

$$|H(j10^{-2}\omega_c)| \cong \frac{10^{-2}\omega_c}{\omega_c} \cong 10^{-2}$$

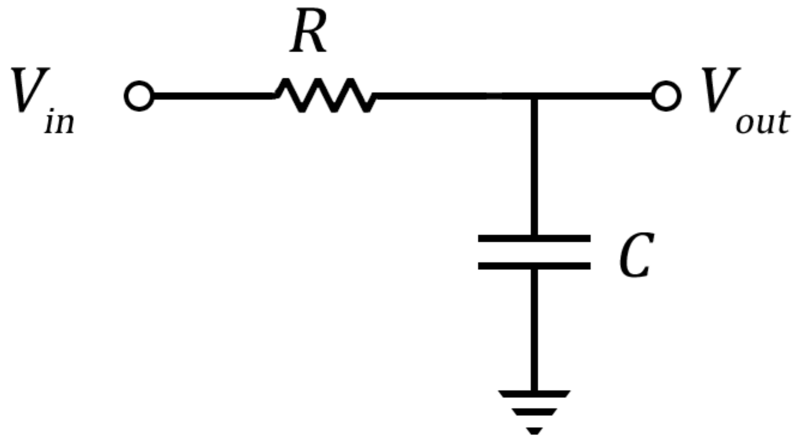
$$20 \cdot \log_{10}(|H(j10^{-2}\omega_c)|) = 20(\log_{10}(10^{-2}))$$

$$20 \cdot \log_{10}(|H(j10^{-2}\omega_c)|) = -40db$$

Desta forma podemos afirmar que: Se $\omega \ll \omega_c$; o ganho sobe 20bd/década

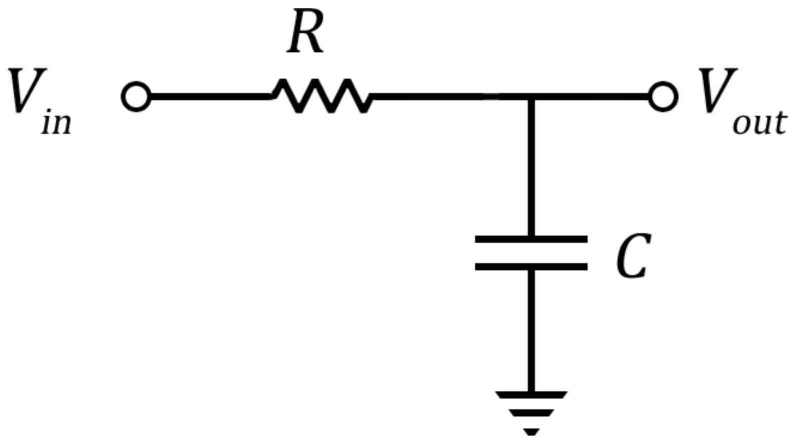
Frequência de corte

Exemplo: Projete um filtro passa baixas RC, com uma frequência de corte de 500Hz, usando um capacitor de 50nF e desenhe o diagrama de bode para o ganho de tensão.



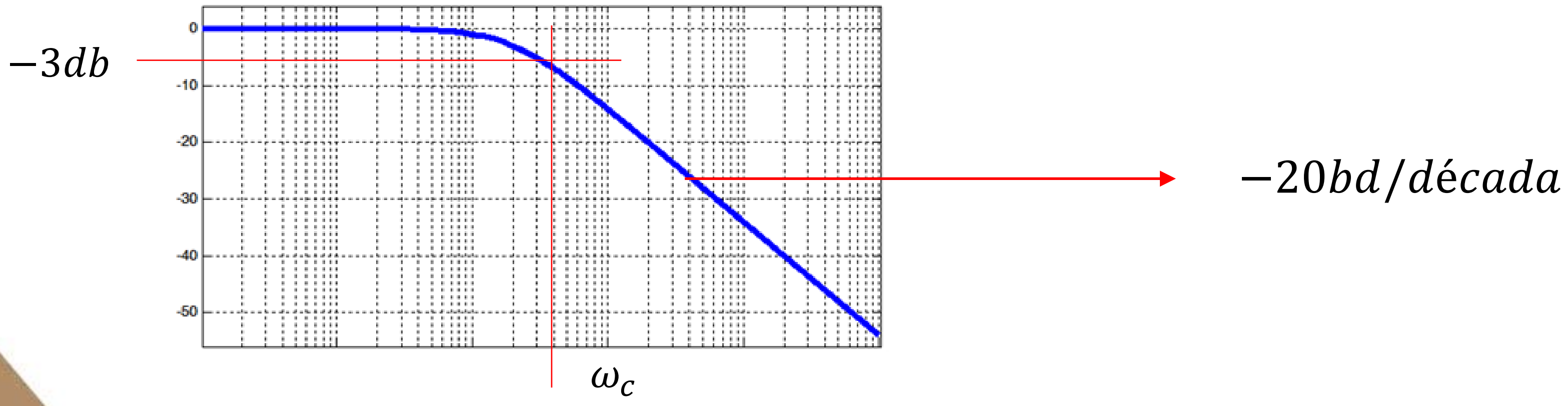
Frequência de corte

Exemplo: Projete um filtro passa baixas RC, com uma frequência de corte de 500Hz, usando um capacitor de 50nF e desenhe o diagrama de bode para o ganho de tensão.

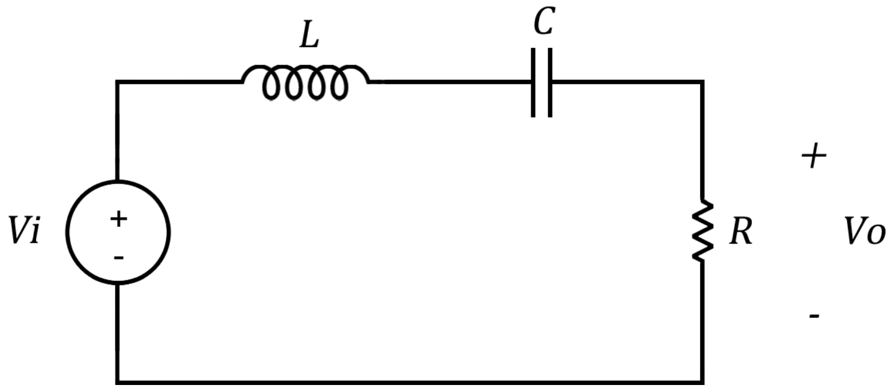


$$\omega_c = \frac{1}{RC} \qquad \omega_c = 2\pi f_c \quad \rightarrow \quad f_c = \frac{\omega_c}{2\pi}$$

$$\boldsymbol{f_c = \frac{1}{2\pi \cdot R \cdot 50 \cdot 10^{-9}} \quad \therefore \quad R = 6366\Omega}$$



Seletores de frequência



$$H(s) = \frac{R}{sL + \frac{1}{sC} + R} = \frac{sRC}{s^2LC + 1 + sRC} = \frac{\boldsymbol{s \cdot \frac{R}{L}}}{\boldsymbol{s^2 + s \cdot \frac{R}{L} + \frac{1}{LC}}}$$

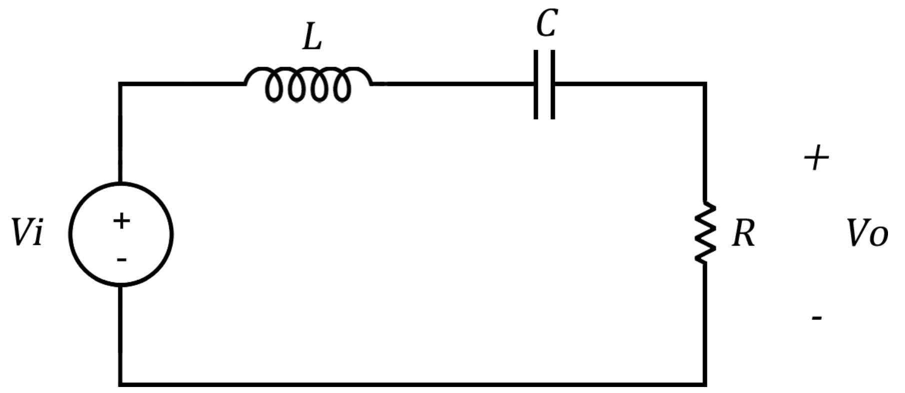
$$p_{1,2} - \frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c} = -a \pm \sqrt{a^2 - \omega_o^2}$$

$$\boldsymbol{\alpha = \frac{R}{2L} \qquad \omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{H(s) = \frac{2\alpha \cdot s}{s^2 + 2\alpha \cdot s + \omega_o^2}}}$$

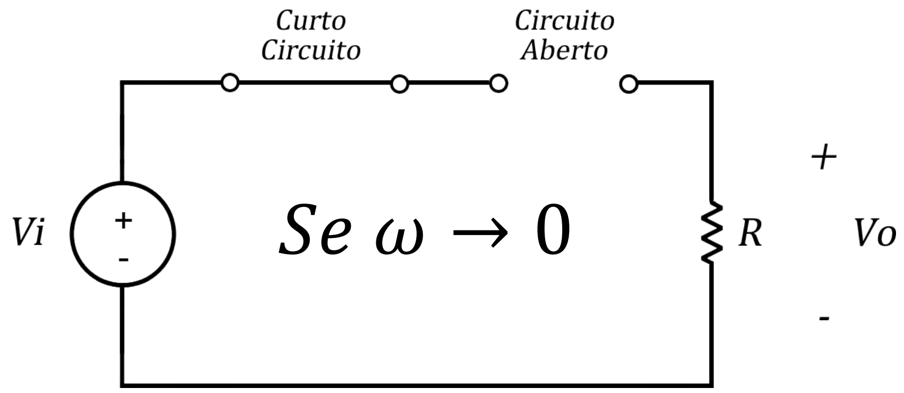
Seletores de frequência

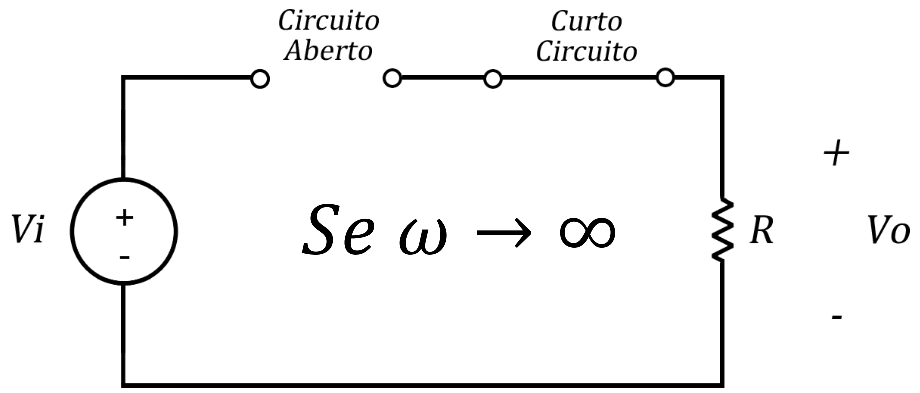
O circuito ao lado representa um esquema de um filtro de segunda ordem passivo na configuração passa faixa (série)



Ao avaliarmos os dois extremos da frequência concluímos que a saída Vo é igual a zero para ambos

Quando obtemos o valor máximo de Vo ???





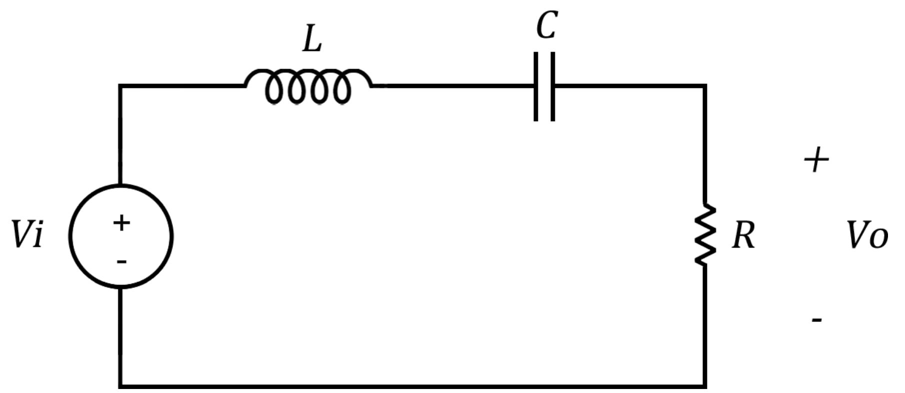
Seletores de frequência

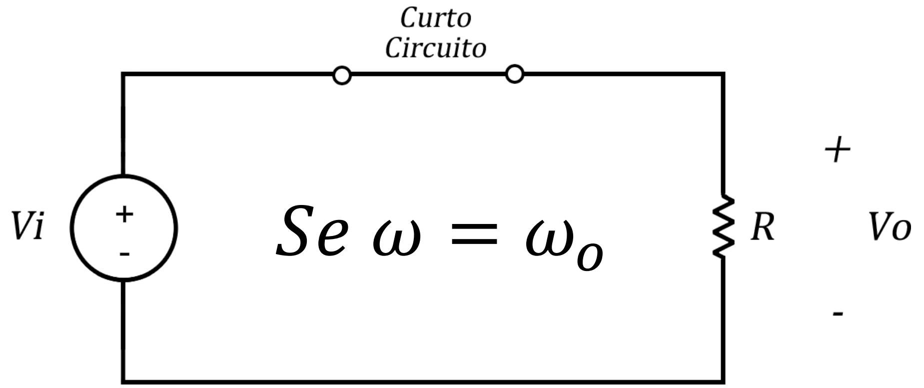
A frequência central deste filtro, é definida quando a soma das impedância do indutor e do capacitor forem igual a zero. Ou seja, **frequência de ressonância**

$$\frac{1}{j\omega_o C} + j\omega_o L = 0$$

$$\frac{1}{j\omega_o C} = -j\omega_o L \quad \therefore \quad \frac{1}{LC} = \omega_o^2$$

$$\boxed{\boldsymbol{\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}}}}$$





Seletores de frequência

Os gráfico apresentam os mesmos dados, porém em formas distintas

Gráfico de resposta em frequência
Ganho($|H(j\omega)|$) x Frequência(ω)

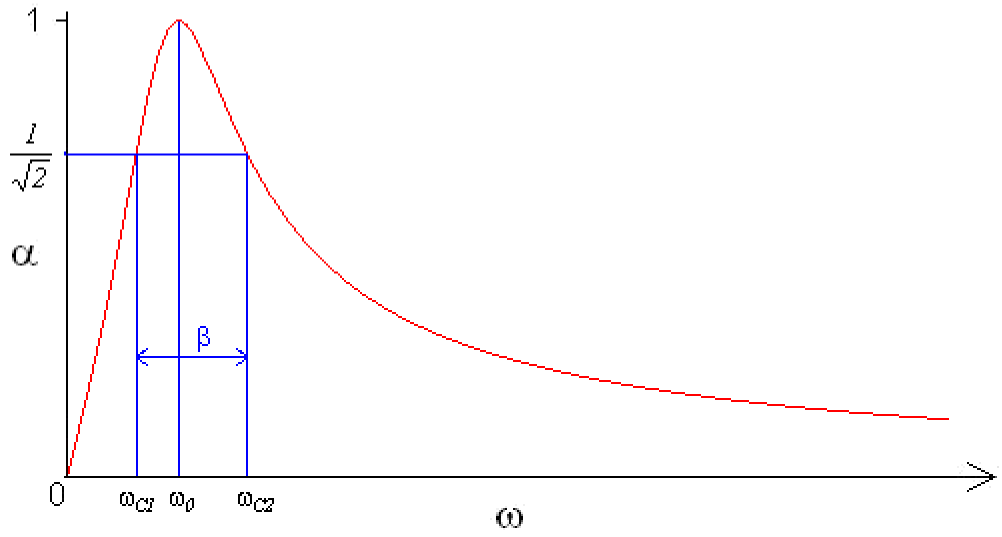
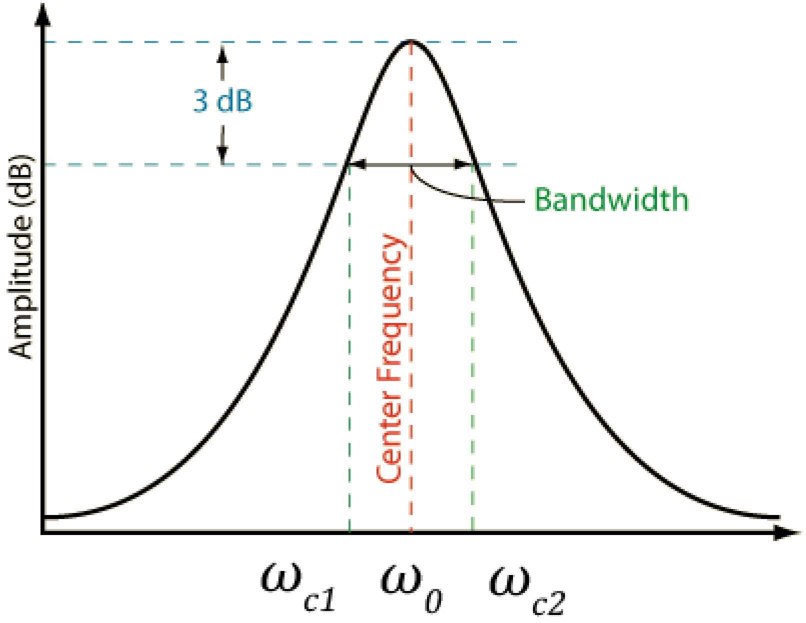


Gráfico de bode
Ganho(dB) x Frequência(log10)



Seletores de frequência

Diferente dos filtros de primeira ordem, este filtro apresenta duas frequências de corte (filtro de segunda ordem), que limitam uma determinada faixa de frequência. Para definirmos as frequências de corte, seguimos o mesmo raciocínio utilizado para os filtros de primeira ordem.

$$|H(j\omega_c)| = \frac{1}{\sqrt{2}} H_{max}$$

$$H(j\omega_c) = \frac{\left(\frac{R}{L}\right) \cdot j\omega_c}{(j\omega_c)^2 + \left(\frac{R}{L}\right) \cdot j\omega_c + \frac{1}{LC}}$$

$$H_{max} = |H(j\omega_o)| = 1$$

$$|H(j\omega_c)| = \frac{\left(\frac{R}{L}\right) \cdot \omega_c}{\sqrt{\left(\frac{1}{LC} - \omega_c^2\right)^2 + \left(\frac{R \cdot \omega_c}{L}\right)^2}}$$

Seletores de frequência

$$|H(j\omega_c)| = \frac{1}{\sqrt{2}} H_{max}$$

$$\frac{\left(\frac{R}{L}\right) \cdot \omega_c}{\sqrt{\left(\frac{1}{LC} - \omega_c^2\right)^2 + \left(\frac{R \cdot \omega_c}{L}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Esta equação resulta em dois valores válidos para ω_c, que são:

$$\boldsymbol{\omega_{c1} = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}} \quad \rightarrow \quad \omega_{c1} = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \omega_o^2}}$$

$$\boldsymbol{\omega_{c2} = +\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}} \quad \rightarrow \quad \omega_{c2} = +\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \omega_o^2}}$$

Seletores de frequência

Podemos também calcular a largura da banda pela subtraindo as duas frequência de corte calculadas anteriormente

$$\beta = \omega_{c2} - \omega_{c1}$$

$$\beta = +\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \omega_o^2} - (-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \omega_o^2})$$

$$\beta = 2 \cdot \alpha$$

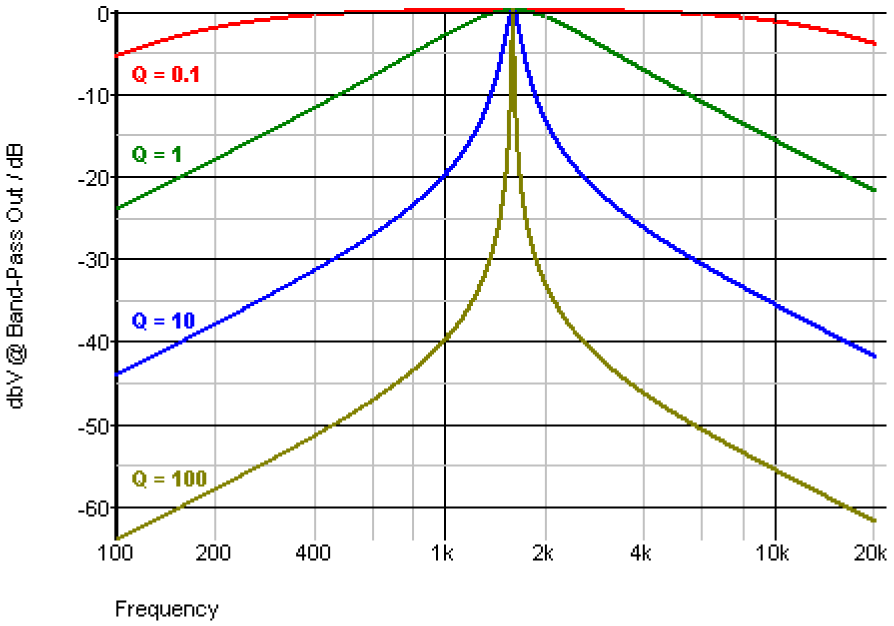
$$\boxed{\beta = \frac{R}{L}}$$

Seletores de frequência

A qualidade do filtro ou fator de mérito, define a seletividade do filtro em relação as frequência de filtragem. É definido pela razão entre a frequência central e a largura da banda. Quanto maior a qualidade, maior a seletividade e menor a faixa de frequência filtrada.

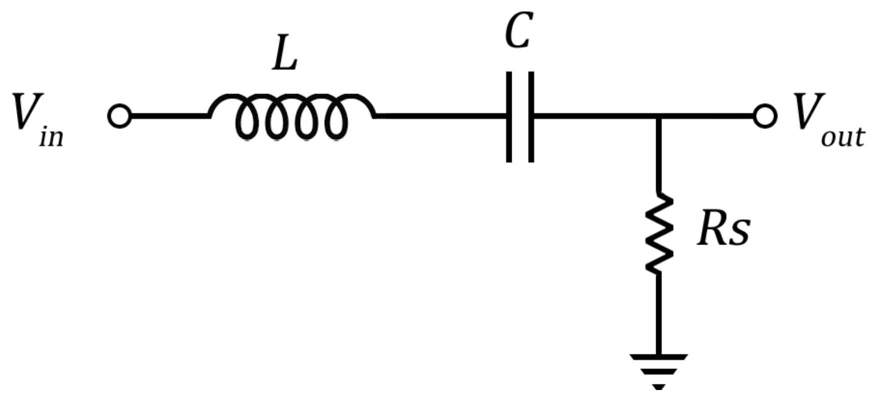
$$Q = \frac{\omega_o}{\beta} = \frac{\frac{1}{\sqrt{LC}}}{\frac{R}{L}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{Q = \sqrt{\frac{L}{C \cdot R^2}}}}$$



Seletores de frequência

Filtro passa faixa (série) – Passivo



Parâmetros	
ω_o	Frequência central Frequência de ressonância
$\omega_{c1,c2}$	Frequências de corte
β	Largura da banda
Q	Fator de Qualidade

$$\boldsymbol{H(s) = \frac{\beta \cdot s}{s^2 + \beta \cdot s + \omega_o^2}}$$

$$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad \alpha = \frac{R}{2L} \qquad \beta = \frac{R}{L}$$

$$\omega_{c1,c2} = \pm\frac{\beta}{2} + \sqrt{\left(\frac{\beta}{2}\right)^2 + \omega_o^2}$$

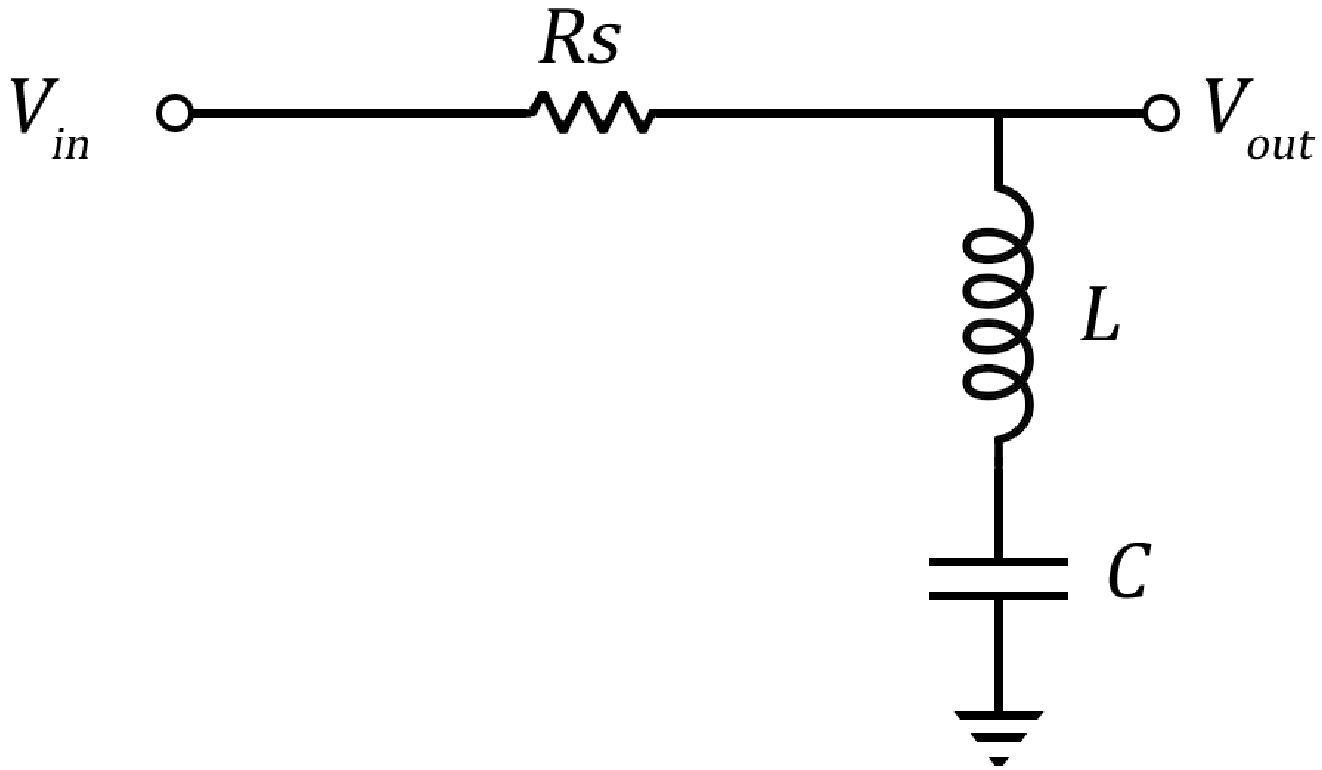
OU

$$\omega_{c1,c2} = \omega_o\left(\pm\frac{1}{2Q} + \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2Q}\right)^2}\right)$$

$$Q = \frac{\omega_o}{\beta}$$

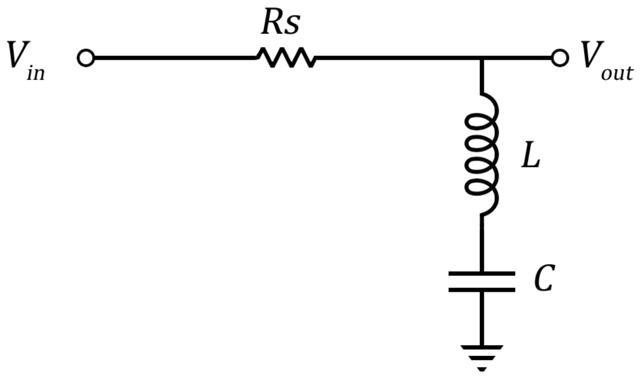
Seletores de frequência

Exercício: Relacionando os extremos da frequência, classifique o filtro abaixo



Seletores de frequência

Filtro rejeita faixa (série) – Passivo



$$H(s) = \frac{s^2 + \omega_o^2}{s^2 + \beta \cdot s + \omega_o^2}$$

$$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad \alpha = \frac{R}{2L} \qquad \beta = \frac{R}{L}$$

$$\omega_{c1,c2} = \pm\frac{\beta}{2} + \sqrt{\left(\frac{\beta}{2}\right)^2 + \omega_o^2}$$

OU

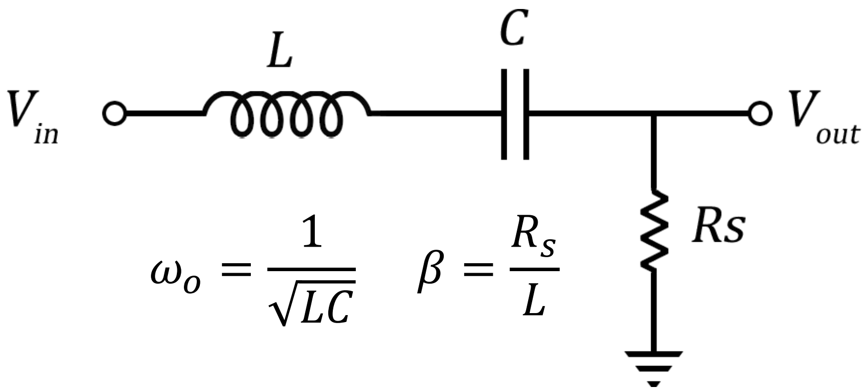
$$\omega_{c1,c2} = \omega_o\left(\pm\frac{1}{2Q} + \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2Q}\right)^2}\right)$$

$$Q = \frac{\omega_o}{\beta}$$

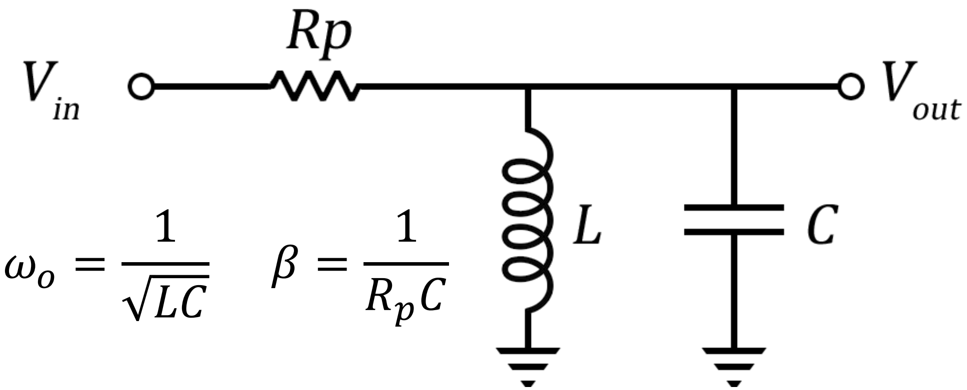
Parâmetros	
ω_o	Frequência central Frequência de ressonância
$\omega_{c1,c2}$	Frequências de corte
β	Largura da banda
Q	Fator de Qualidade

Filtro de segunda ordem passivo - **Passa Faixa**

Configuração Série	Configuração Paralelo



$$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad \beta = \frac{R_s}{L}$$

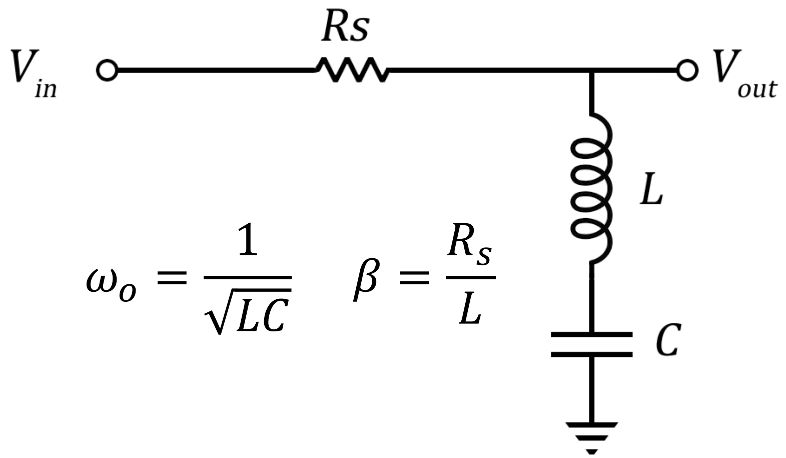


$$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad \beta = \frac{1}{R_p C}$$

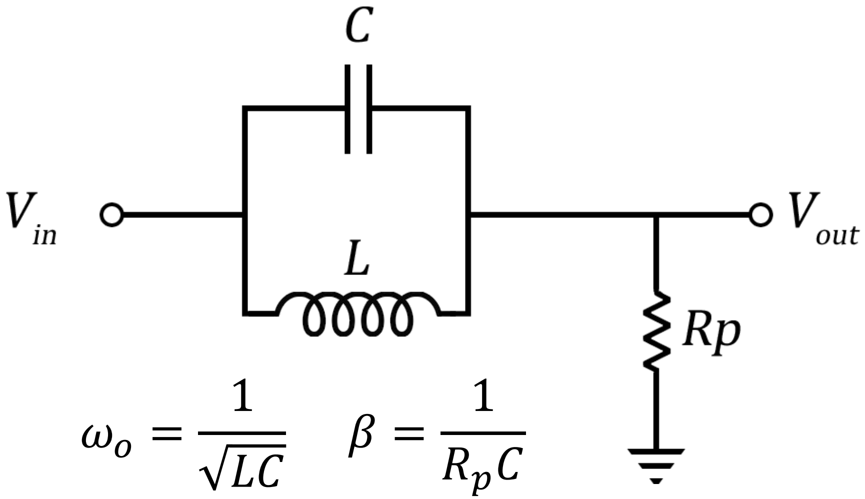
$$H(s) = \frac{\beta \cdot s}{s^2 + \beta \cdot s + \omega_o^2}$$

Filtro de segunda ordem passivo – **Rejeita Faixa**

Configuração Série	Configuração Paralelo



$$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad \beta = \frac{R_s}{L}$$



$$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad \beta = \frac{1}{R_p C}$$

$$H(s) = \frac{s^2 + \omega_o^2}{s^2 + \beta \cdot s + \omega_o^2}$$

Filtro de segunda ordem passivo – **Rejeita Faixa**

Exercício: Use um capacitor de 20nF para projetar um filtro passa faixa RLC em série, como. A frequência central deverá ser 20KHz e o fator de qualidade 5.

$$\boldsymbol{H(s) = \frac{\beta \cdot s}{s^2 + \beta \cdot s + \omega_o^2}}$$

$$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad \beta = \frac{R}{L}$$

$$Q = \frac{\omega_o}{\beta}$$

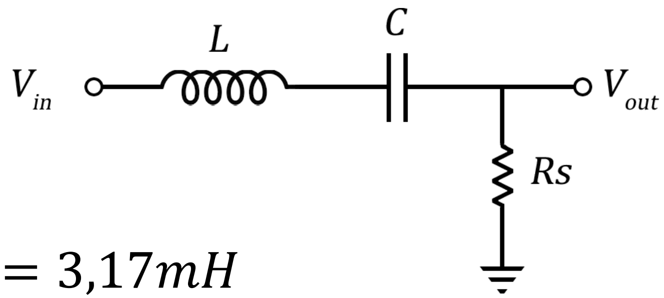
$$\omega_{c1,c2} = \pm\frac{\beta}{2} + \sqrt{\left(\frac{\beta}{2}\right)^2 + \omega_o^2}$$

OU

$$\omega_{c1,c2} = \omega_o\left(\pm\frac{1}{2Q} + \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2Q}\right)^2}\right)$$

Filtro de segunda ordem passivo – **Rejeita Faixa**

Exercício: Use um capacitor de 20nF para projetar um filtro passa faixa RLC em série, como. A frequência central deverá ser 20KHz e o fator de qualidade 5.



$$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \rightarrow \quad 2 \cdot \pi \cdot 20 \cdot 10^3 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot 20 \cdot 10^{-9}}} \quad \therefore \quad L = 3{,}17mH$$

$$Q = \frac{\omega_o}{\beta} \quad \rightarrow \quad 5 = \frac{2 \cdot \pi \cdot 20 \cdot 10^3}{\beta} \quad \therefore \quad \beta = 25120\, rad/seg$$

$$\beta = \frac{R}{L} \quad \rightarrow \quad 25120 = \frac{R}{3{,}17 \cdot 10^{-3}} \quad \therefore \quad R = 79{,}63\Omega$$