Aula 17

Seletores de frequência III
Curvas de Bode – Ganho de Tensão

Matérias que serão discutidas
Nilsson – Circuitos Elétricos
Capítulos 12, 13 e 14 – LAPLACE
Capítulo 8 – Circuitos de Segunda ordem no domínio do tempo

Circuitos Elétricos II

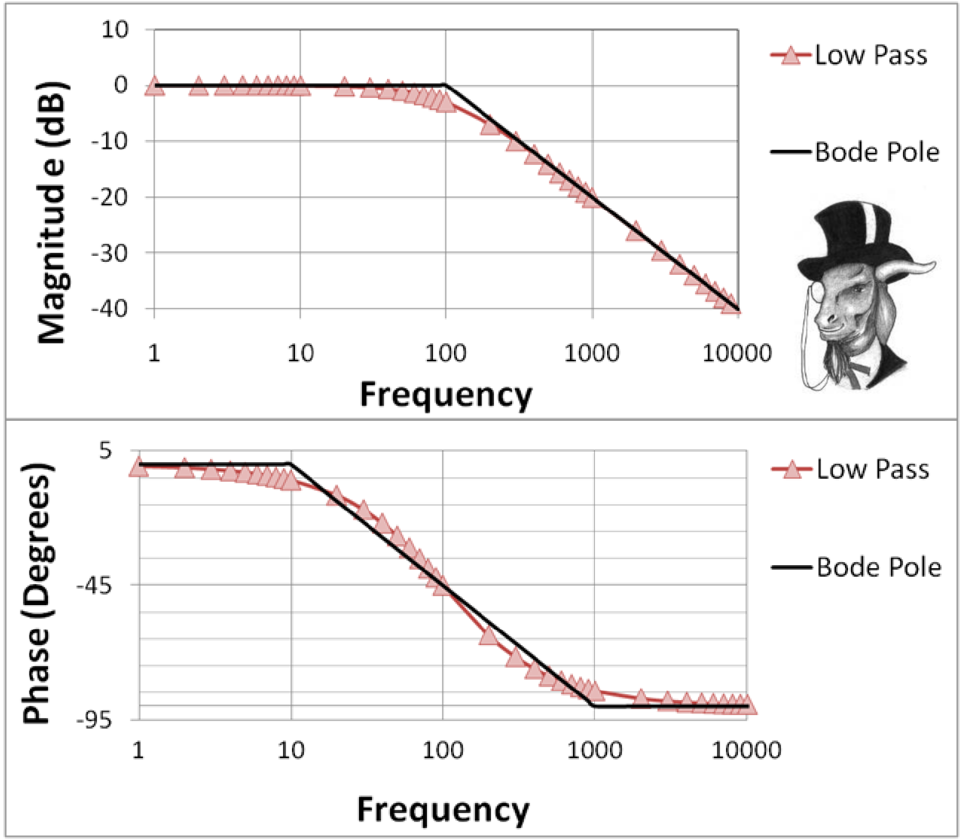
Prof. Henrique Amorim - UNIFESP - ICT

Curvas de bode

Em circuitos elétricos e em sistemas de controle , as curvas de Bode são gráficos da resposta em frequência de um sistema. Esta representação é composta por um gráfico de magnitude, geralmente em decibéis, e um gráfico de fase, expressando o deslocamento de fase. Em ambos os gráficos, a frequência é plotada em escala logarítima (décadas).

O gráfico de amplitude é do tipo **log-log plot**, enquanto o gráfico de fase é um gráfico **lin-log plot**.

Como originalmente concebido por Hendrik Wade Bode na década de 1930, o as linhas representam uma aproximação assintótica da resposta em frequência, usando segmentos de reta.



Decibel

Como o decibel analisa a atenuação ou ganho de energia, podemos defini-lo da seguinte forma

$$G_P = 10 \cdot \log_{10}\left(\frac{P_o}{P_i}\right)$$

Considerando o ganho de tensão ou corrente, sem alterar a impedância de saída temos:

$$G_V = 10 \cdot \log_{10}\left(\frac{\frac{V_o^2}{Z}}{\frac{V_i^2}{Z}}\right) = 10 \cdot \log_{10}\left(\left(\frac{V_o}{V_i}\right)^2\right) = 20 \cdot \log_{10}\left(\frac{V_o}{V_i}\right)$$

$$G_I = 10 \cdot \log_{10}\left(\frac{I_o^2 \cdot Z}{I_i^2 \cdot Z}\right) = 10 \cdot \log_{10}\left(\left(\frac{I_o}{I_i}\right)^2\right) = 20 \cdot \log_{10}\left(\frac{I_o}{I_i}\right)$$

Propriedades do Log na base 10

$$\log_{10}(1) = 0$$

$$\log_{10}(10) = 1$$

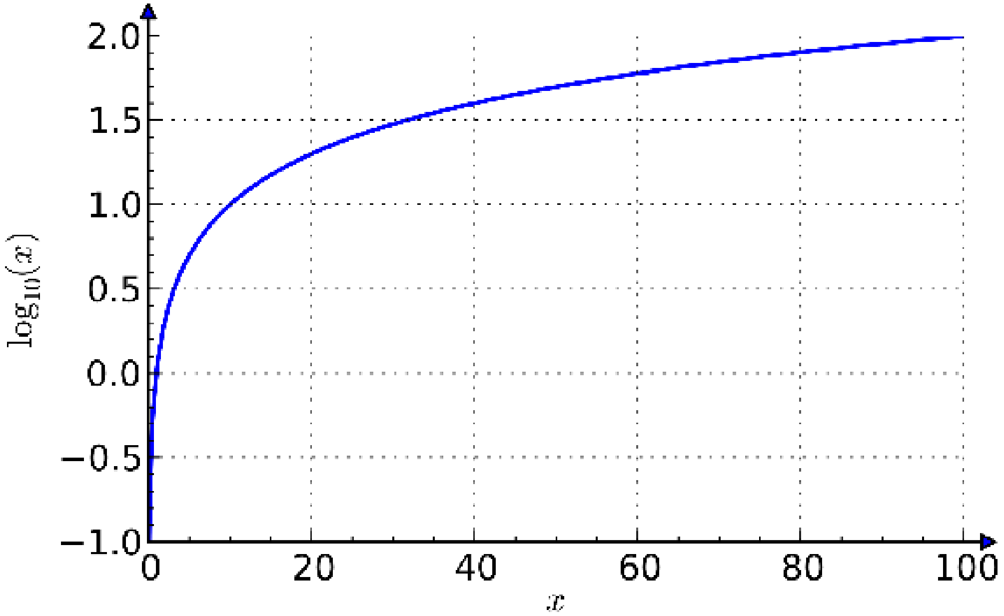
$$\log_{10}(100) = 2$$

$$\log_{10}(a * b) = \log_{10}(a) + \log(b)$$

$$\log_{10}(a/b) = \log_{10}(a) - \log_{10}(b)$$

$$\log_{10}(a^N) = N \cdot log_{10}(a)$$

$$\log_{10}(1/a) = -\log_{10}(a)$$



Forma Padrão de uma função transferência para as curvas de bode

Polo $(j\omega)^{-1}$ ou zero $(j\omega)$ na origem

Zero simples

Zero quadrádico

Ganho

$$H(j\omega) = K \cdot \frac{(j\omega)^{\pm 1} \cdot \left(1 + \frac{j\omega}{z_1}\right)\left[1 + \frac{2\xi_1\omega}{\omega_k} + \left(\frac{j\omega}{\omega_k}\right)^2\right]\ldots}{\left(1 + \frac{j\omega}{p_1}\right)\left[1 + \frac{2\xi_2\omega}{\omega_n} + \left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2\right]\ldots}$$

Polo simples

Polo quadrádico

Diagrama de Bode

Exemplo: Encontre a forma padrão da função transferência abaixo (em relação a frequência) e trace a curva do bode para a magnitude.

$$\boldsymbol{H(s) = \frac{200s}{(s+2)(s+10)}}$$

Diagrama de Bode

Exemplo: Encontre a forma padrão da função transferência abaixo (em relação a frequência) e trace a curva do bode para a magnitude.

$$H(s) = \frac{200s}{(s+2)(s+10)} = \frac{200}{2 \cdot 10} \cdot \frac{s}{\left(1+\frac{s}{2}\right)\left(1+\frac{s}{10}\right)}$$

$$H(j\omega) = 10 \cdot \frac{j\omega}{\left(1+\frac{j\omega}{2}\right)\left(1+\frac{j\omega}{10}\right)}$$

$$20 \cdot \log_{10}(|H(j\omega)|) = 20 \cdot \log_{10}\left(10 \cdot \frac{|j\omega|}{\left(\left|1+\frac{j\omega}{2}\right|\right)\left(\left|1+\frac{j\omega}{10}\right|\right)}\right)$$

Diagrama de Bode

Exemplo: Encontre a forma padrão da função transferência abaixo (em relação a frequência) e trace a curva do bode para a magnitude.

$$20 \cdot \log_{10}(|H(j\omega)|) = 20 \cdot \log_{10}\left(10 \cdot \frac{|j\omega|}{\left(\left|1+\frac{j\omega}{2}\right|\right)\left(\left|1+\frac{j\omega}{10}\right|\right)}\right)$$

$$20 \cdot \log_{10}(|H(j\omega)|) = 20 \cdot \log_{10}(10) +$$

$$20 \cdot \log_{10}(|j\omega|) +$$

$$*20 \log_{10}(10) = 20db$$

$$20 \cdot \log_{10}\left(\frac{1}{|1+\frac{j\omega}{2}|}\right) +$$

$$20 \cdot \log_{10}\left(\frac{1}{|1+\frac{j\omega}{10}|}\right) +$$

Polos e zeros na origem e cte- Assíntota

Assíntota do zero na origem

ω	0,001	0,01	0,1	1,00	10	100	1000
db	-60	-40	-20	0	20	40	60

$$20 \cdot \log_{10}(|j\omega|)$$

Assíntota do polo na origem

ω	0,001	0,01	0,1	1,00	10	100	1000
db	60	40	20	0	-20	-40	-60

$$20 \cdot \log_{10}\left(\frac{1}{|j\omega|}\right)$$

Caso a função transferência apresente mais de 1 zeros ou polos na origem, o crescimento ou decrescimento será definido por:

Assíntota de n zeros na origem

ω	0,001	0,01	0,1	1,00	10	100	1000
db	$-n60$	$-n40$	$-n20$	0	$n20$	$n40$	$n60$

$$20 \cdot \log_{10}(|(j\omega)^n|)$$

Assíntota de uma constante

0,001	0,01	0,1	1,00	10	100	1000
26,02	26,02	26,02	26,02	26,02	26,02	26,02

$$20 \cdot \log_{10}(k) \quad se \quad k = 20$$

$$20 \cdot \log_{10}(20) = 26{,}021$$

Polos e zeros simples - Assíntota

Assíntota do zero simples

ω	0,01	0,05	0,50	1,00	2,00	3,00	4,00	6,00	8,00	10,00	100,00	1000,00	10E4
db	0,000	0,000	0,011	0,043	0,170	0,374	0,645	1,335	2,148	3,010	20,043	40,000	60,000
$\cong db$	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	20,000	40,000	60,000

Após a frequência de polo o ganho é de aproximadamente **20db/dec**

Antes da frequência do polo o ganho em db é próximo de **0**

$$20 \cdot \log_{10}\left(\left|1 + \frac{j\omega}{10}\right|\right)$$

Assíntota do polo simples

ω	0,01	0,05	0,50	1,00	2,00	3,00	4,00	6,00	8,00	10,00	100,00	1000,00	10E4
db	0,000	0,000	-0,011	-0,043	-0,170	-0,374	-0,645	-1,335	-2,148	-3,010	-20,043	-40,000	-60,000
$\cong db$	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	-20,000	-40,000	-60,000

Note que na frequência do polo (ou do zero)o ganho em db é igual a aproximadamente $\pm$**3db**

$$20 \cdot \log_{10}\left(\frac{1}{\left|1 + \frac{j\omega}{10}\right|}\right)$$

$$20 \cdot \log_{10}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -3{,}0103\ db \qquad 20 \cdot \log_{10}\left(\sqrt{2}\right) = 3{,}0103\ db$$

Tabela de respostas

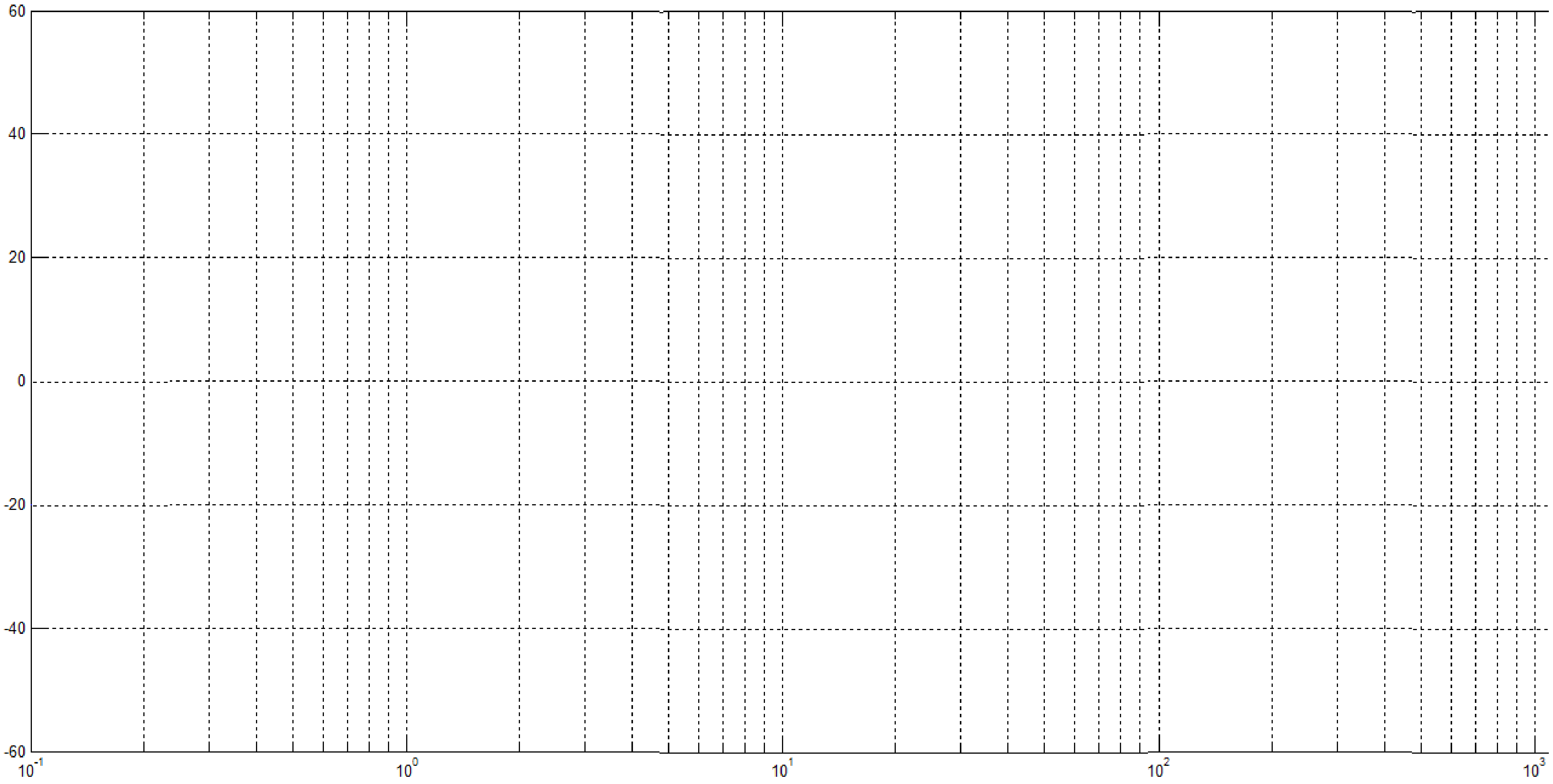
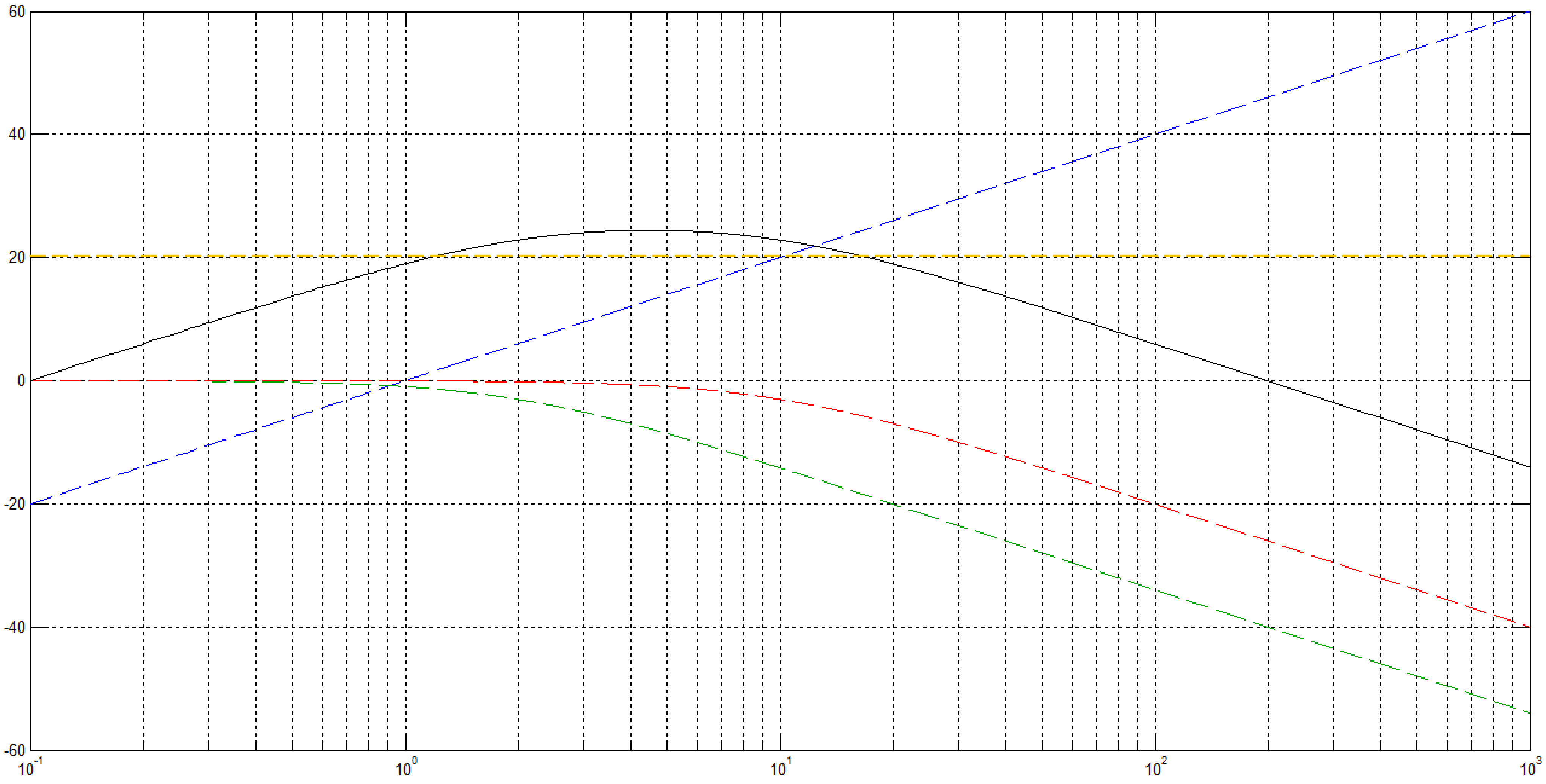
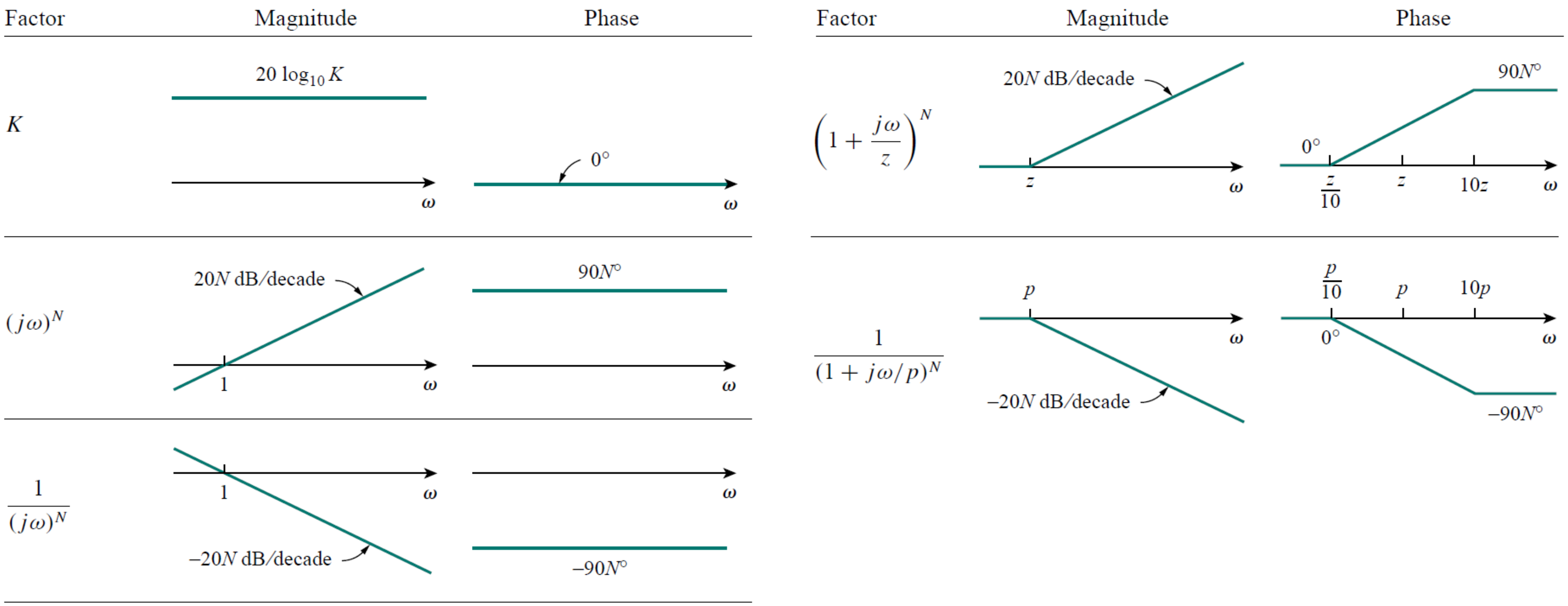


Tabela de respostas

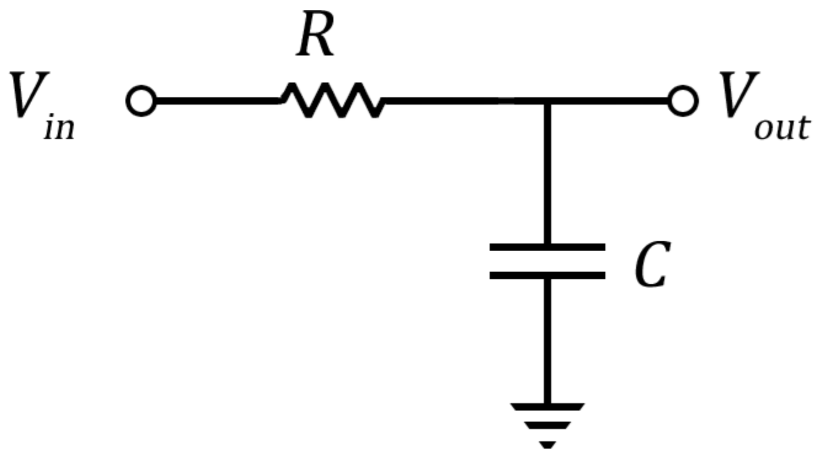


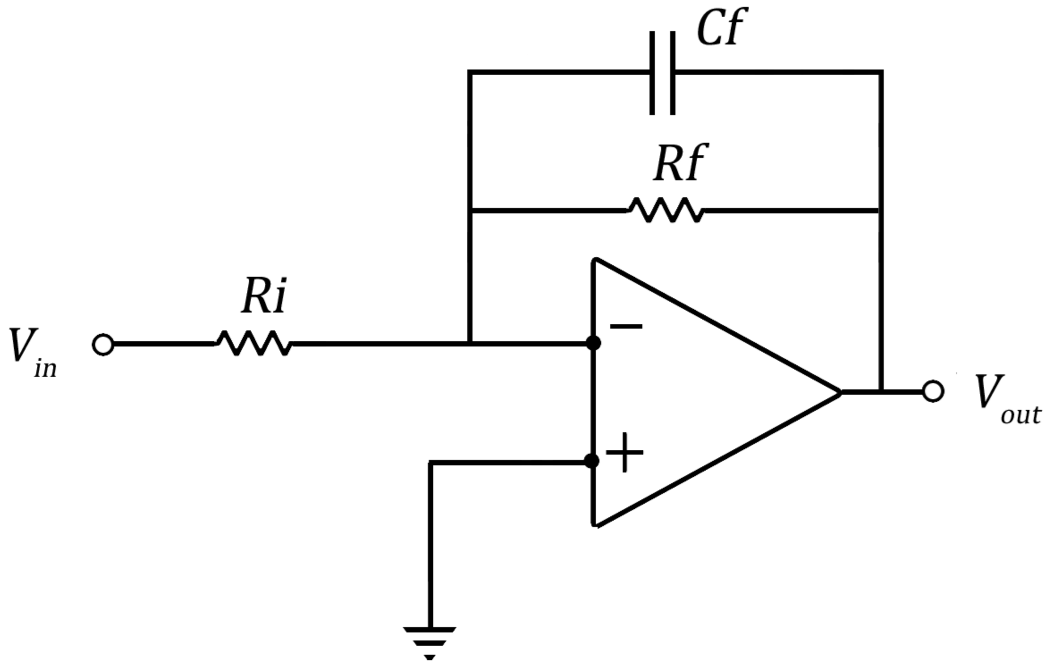
Aproximação para raízes simples



Bode – Primeira ordem

Exercício: Ambos os circuitos são filtros passa baixas de primeira ordem, entretanto o filtro a esquerda é um filtro passivo e o filtro da direita um filtro ativo. Encontre a forma padrão da função transferência para ambos os filtros, e trace o diagrama da bode.



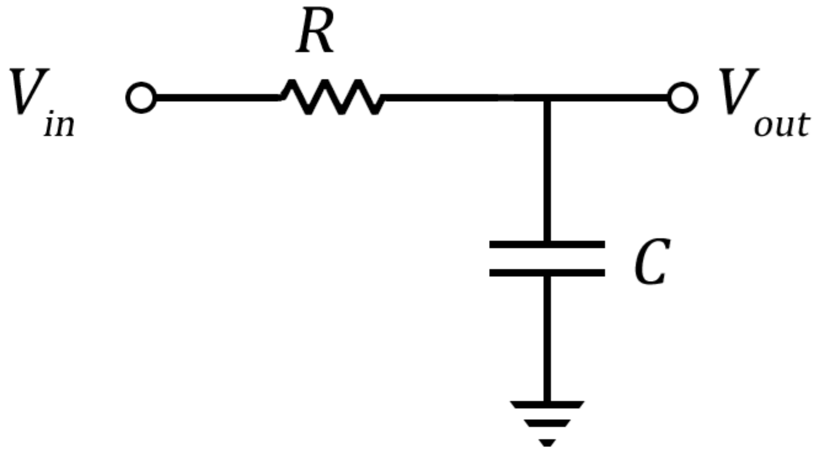


$R = 1K\Omega \;\; e \;\; C = 10\mu F$

$R_i = 500\Omega \;\; , \;\; R_f = 1K\Omega \;\; e \;\; C_f = 10\mu F$

Bode – Primeira ordem

Exercício: Ambos os circuitos são filtros passa baixas de primeira ordem, entretanto o filtro a esquerda é um filtro passivo e o filtro da direita um filtro ativo. Encontre a forma padrão da função transferência para ambos os filtros, e trace o diagrama da bode.



$$H(s) = \frac{\frac{1}{Cs}}{R + \frac{1}{Cs}} = \frac{1}{1 + sRC}$$

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC} = \frac{1}{1 + \frac{j\omega}{\omega_c}}$$

$$\omega_c = \frac{1}{RC}$$

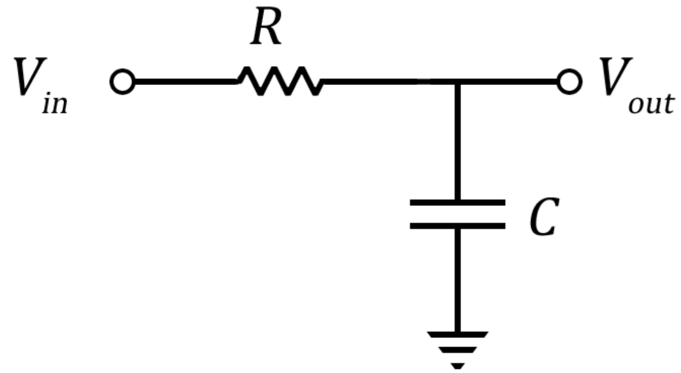
Este filtro possui ganho (K) igual a 1
Não possui influência de zeros
Possui um polo na frequência 1/RC

Bode – Primeira ordem

Exercício: Ambos os circuitos são filtros passa baixas de primeira ordem, entretanto o filtro a esquerda é um filtro passivo e o filtro da direita um filtro ativo. Encontre a forma padrão da função transferência para ambos os filtros, e trace o diagrama da bode.

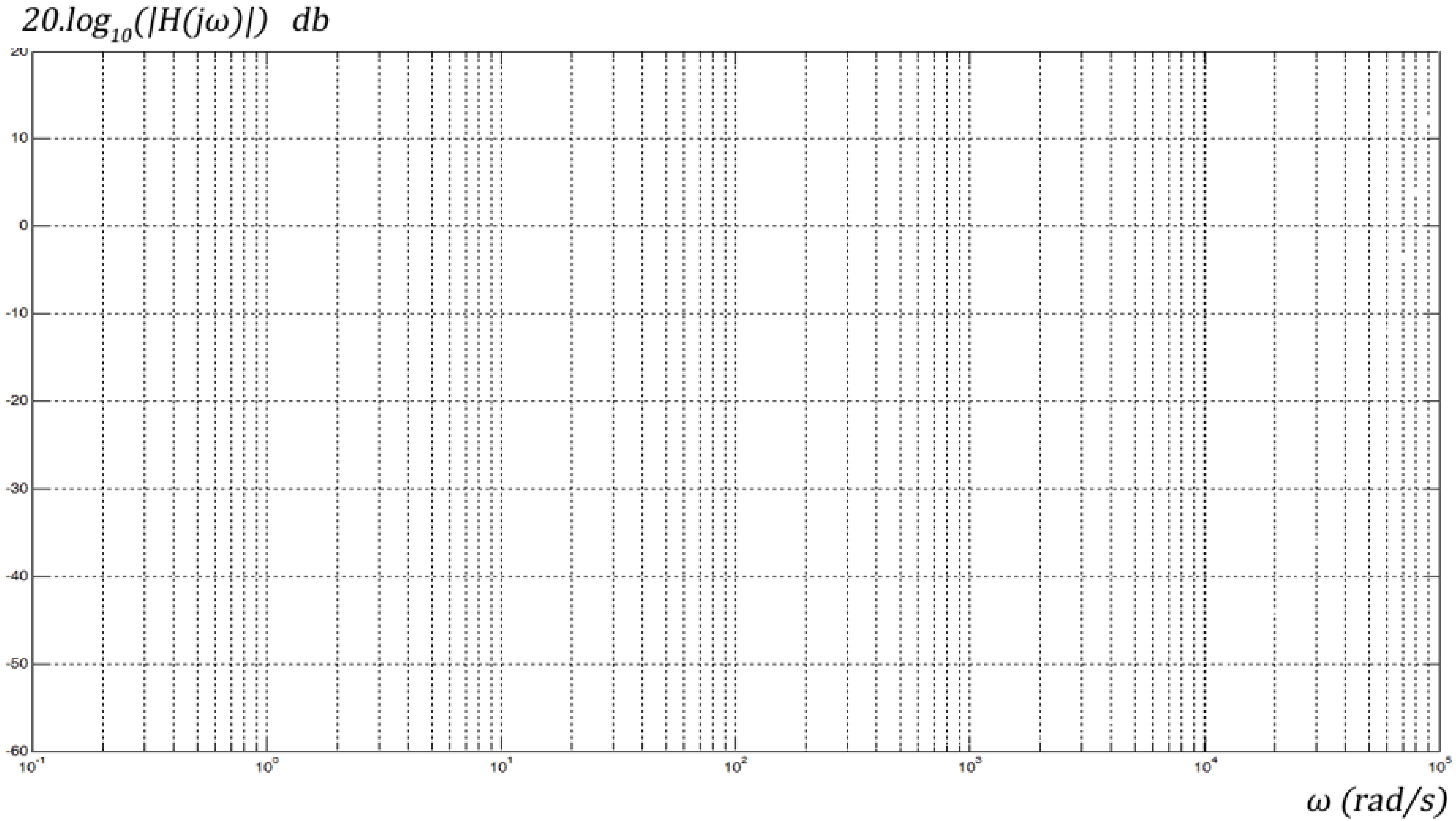
$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + \frac{j\omega}{\omega_c}} \qquad \omega_c = \frac{1}{RC} = \frac{1}{1 \cdot 10^3 \cdot 10 \cdot 10^{-6}} = 100$$

$$20 \cdot \log_{10}(|H(j\omega)|) = 20 \cdot \log_{10}\left(\frac{1}{\left|1+\frac{j\omega}{100}\right|}\right)$$

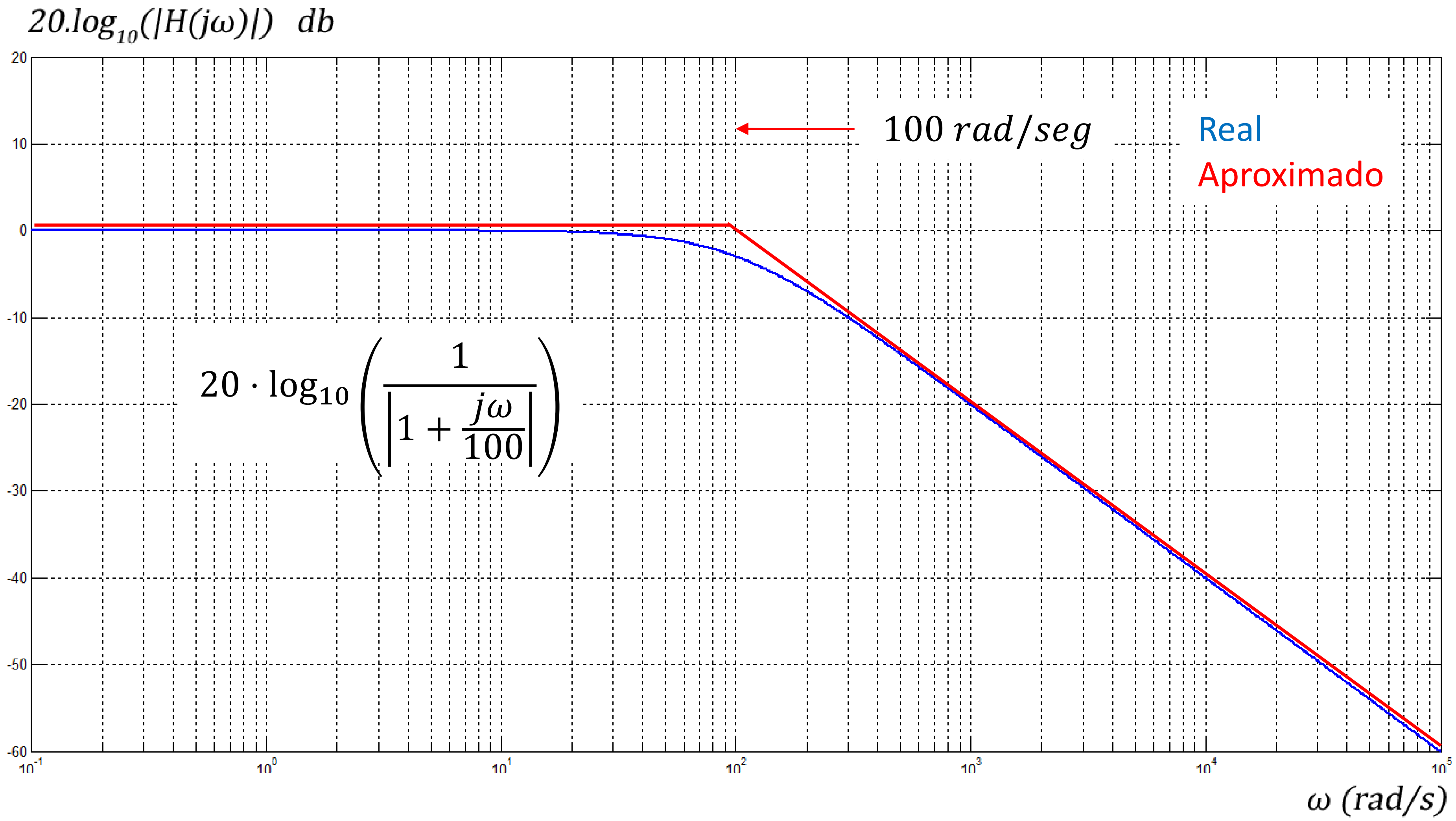


Apenas 1 termo

Bode – Primeira ordem

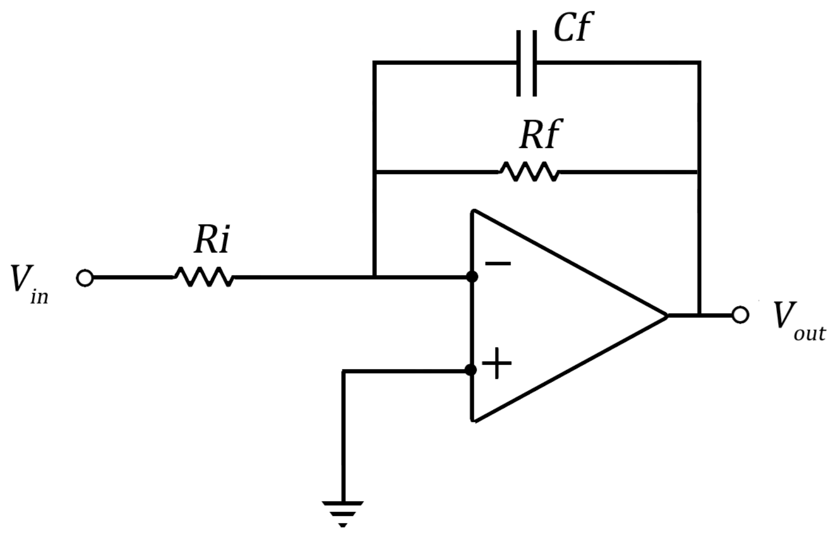


Bode – Primeira ordem



Bode – Primeira ordem

Exercício: Ambos os circuitos são filtros passa baixas de primeira ordem, entretanto o filtro a esquerda é um filtro passivo e o filtro da direita um filtro ativo. Encontre a forma padrão da função transferência para ambos os filtros, e trace o diagrama da bode.



$$H(s) = -\frac{Z_f}{R_i} = -\frac{\frac{1}{C_f s}||R_f}{R_i} = -\frac{\frac{R_f}{C_f s}}{R_i R_f + \frac{R_i}{C_f s}}$$

$$H(s) = -\frac{R_f}{R_i R_f C_f s + R_i} = -\frac{R_f/R_i}{R_f C_f s + 1}$$

$$H(j\omega) = -\frac{R_f}{R_i} \cdot \frac{1}{1 + \frac{j\omega}{\omega_c}} \qquad \omega_c = \frac{1}{R_f C_f}$$

Constante (K) igual a – R_f/R_i
Não possui influência de zeros
Possui um polo na frequência $\frac{1}{R_f Cf}$

O ganho tende a –Rf/Ri
Se $\omega \rightarrow 0$

Bode – Primeira ordem

Exercício: Ambos os circuitos são filtros passa baixas de primeira ordem, entretanto o filtro a esquerda é um filtro passivo e o filtro da direita um filtro ativo. Encontre a forma padrão da função transferência para ambos os filtros, e trace o diagrama da bode.

$$R_i = 500\Omega \quad , \quad R_f = 1K\Omega \quad e \quad C_f = 10\mu F$$

$$H(j\omega) = -\frac{R_f}{R_i} \cdot \frac{1}{1 + \frac{j\omega}{\omega_c}} \qquad \omega_c = \frac{1}{R_f C_f} = 100 \qquad \frac{R_f}{R_i} = 2$$

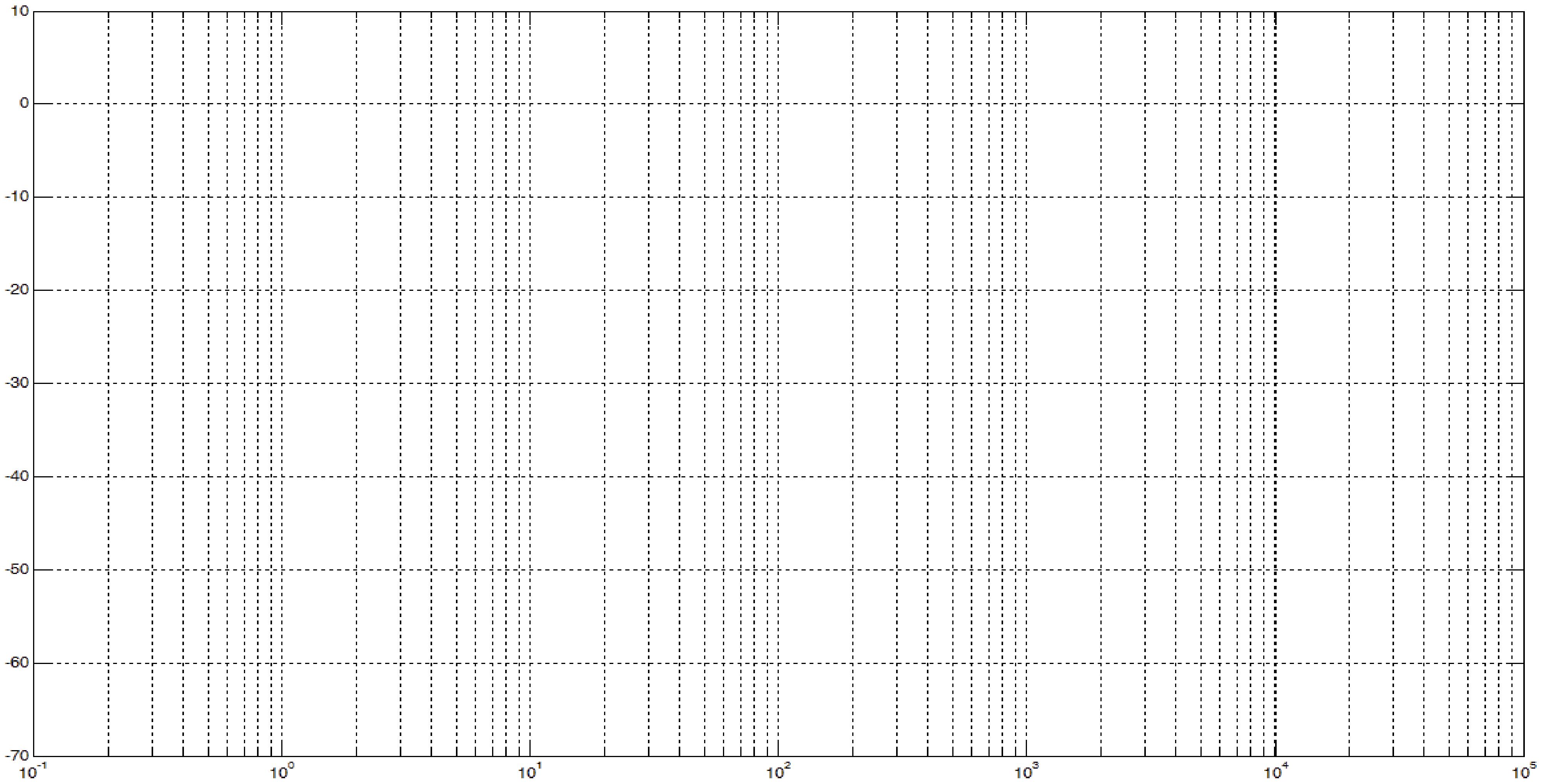
$$20 \cdot \log_{10}(|H(j\omega)|) = 20 \cdot \log_{10}\left(|-2| \cdot \frac{1}{\left|1+\frac{j\omega}{100}\right|}\right)$$

$$20 \cdot \log_{10}(|H(j\omega)|) = 20 \cdot \log_{10}(2) + 20 \cdot \log_{10}\left(\frac{1}{\left|1+\frac{j\omega}{100}\right|}\right)$$

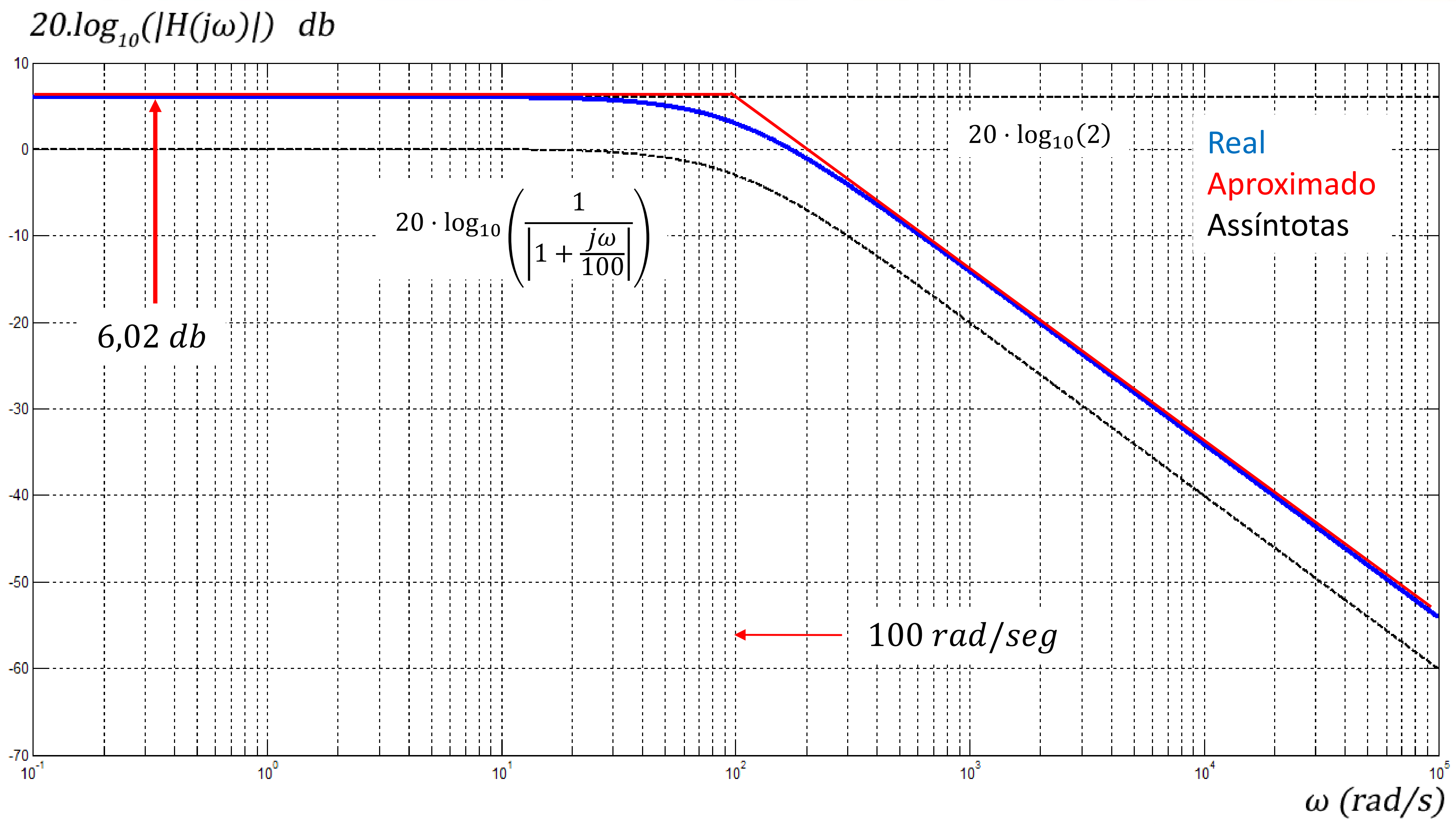
$$* \, 20 \cdot \log_{10}(2) = 6{,}02$$

Dois termos

Bode – Primeira ordem

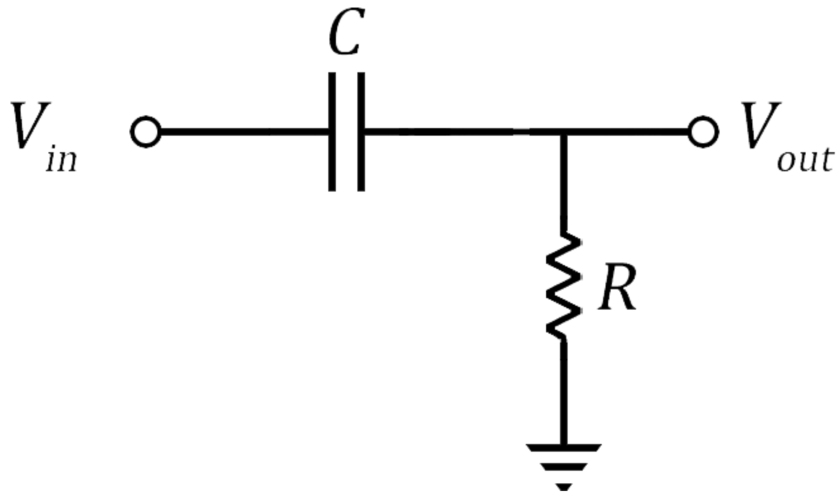


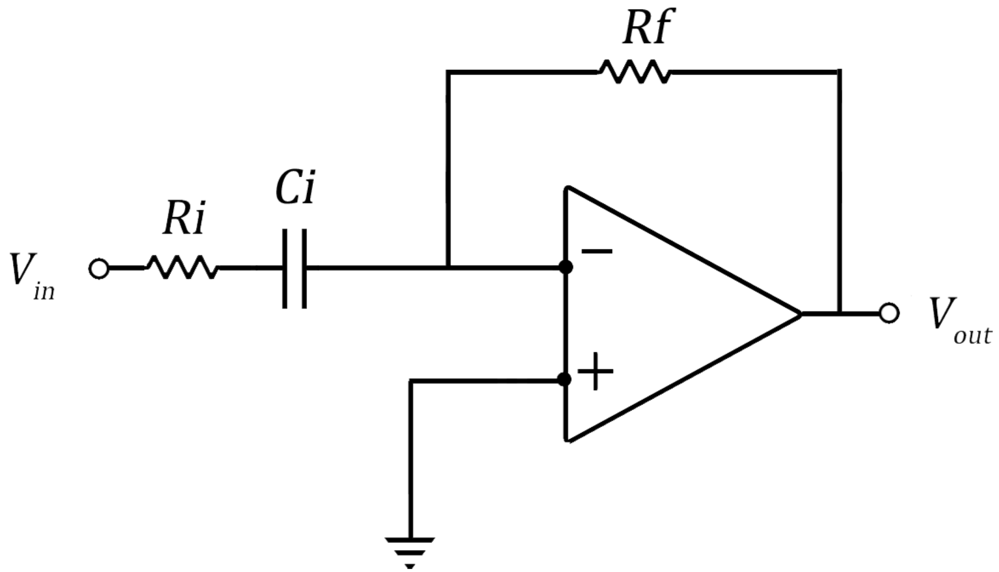
Bode – Primeira ordem



Bode – Primeira ordem

Exercício: Ambos os circuitos são filtros passa altas de primeira ordem, entretanto o filtro a esquerda é um filtro passivo e o filtro da direita um filtro ativo. Encontre a forma padrão da função transferência para ambos os filtros, e trace o diagrama da bode.



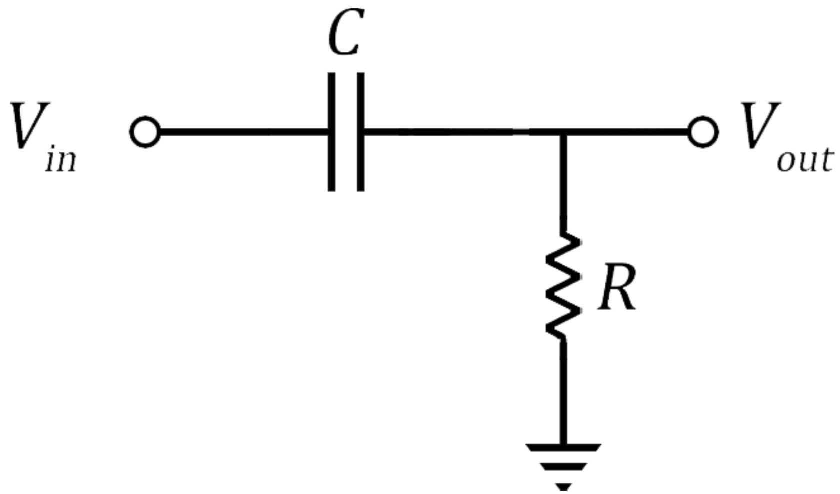


$$R = 1K\Omega \quad e \quad C = 10\mu F$$

$$R_i = 1\mathrm{K}\Omega \;\;, \quad R_f = 2K\Omega \;\; e \;\; C_f = 10\mu F$$

Bode – Primeira ordem

Exercício: Ambos os circuitos são filtros passa altas de primeira ordem, entretanto o filtro a esquerda é um filtro passivo e o filtro da direita um filtro ativo. Encontre a forma padrão da função transferência para ambos os filtros, e trace o diagrama da bode.



$$H(s) = \frac{R}{R + \frac{1}{Cs}} = \frac{RCs}{RCs + 1}$$

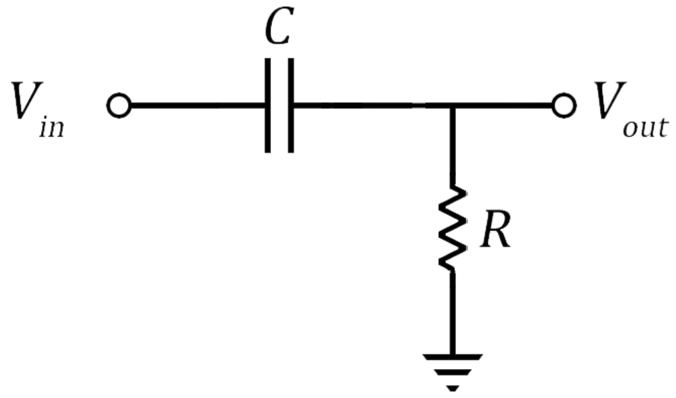
$$H(j\omega) = \frac{RCj\omega}{RCj\omega + 1} = \frac{\frac{j\omega}{\omega_c}}{1 + \frac{j\omega}{\omega_c}}$$

$$\omega_c = \frac{1}{RC}$$

Bode – Primeira ordem

Exercício: Ambos os circuitos são filtros passa altas de primeira ordem, entretanto o filtro a esquerda é um filtro passivo e o filtro da direita um filtro ativo. Encontre a forma padrão da função transferência para ambos os filtros, e trace o diagrama da bode.

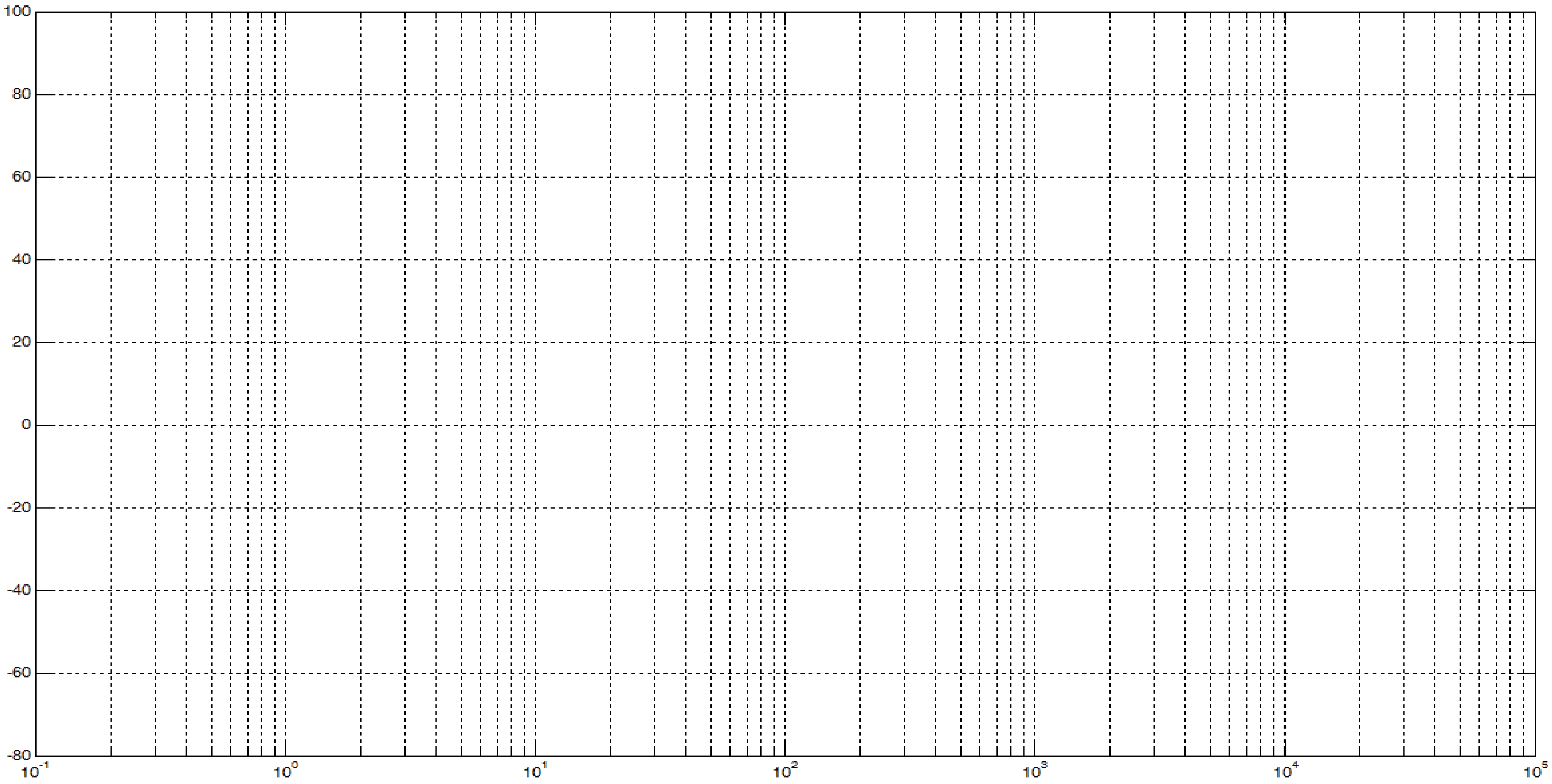
$$H(j\omega) = \frac{\frac{j\omega}{\omega_c}}{1 + \frac{j\omega}{\omega_c}} = \frac{1}{100} \cdot \frac{j\omega}{1 + \frac{j\omega}{100}}$$



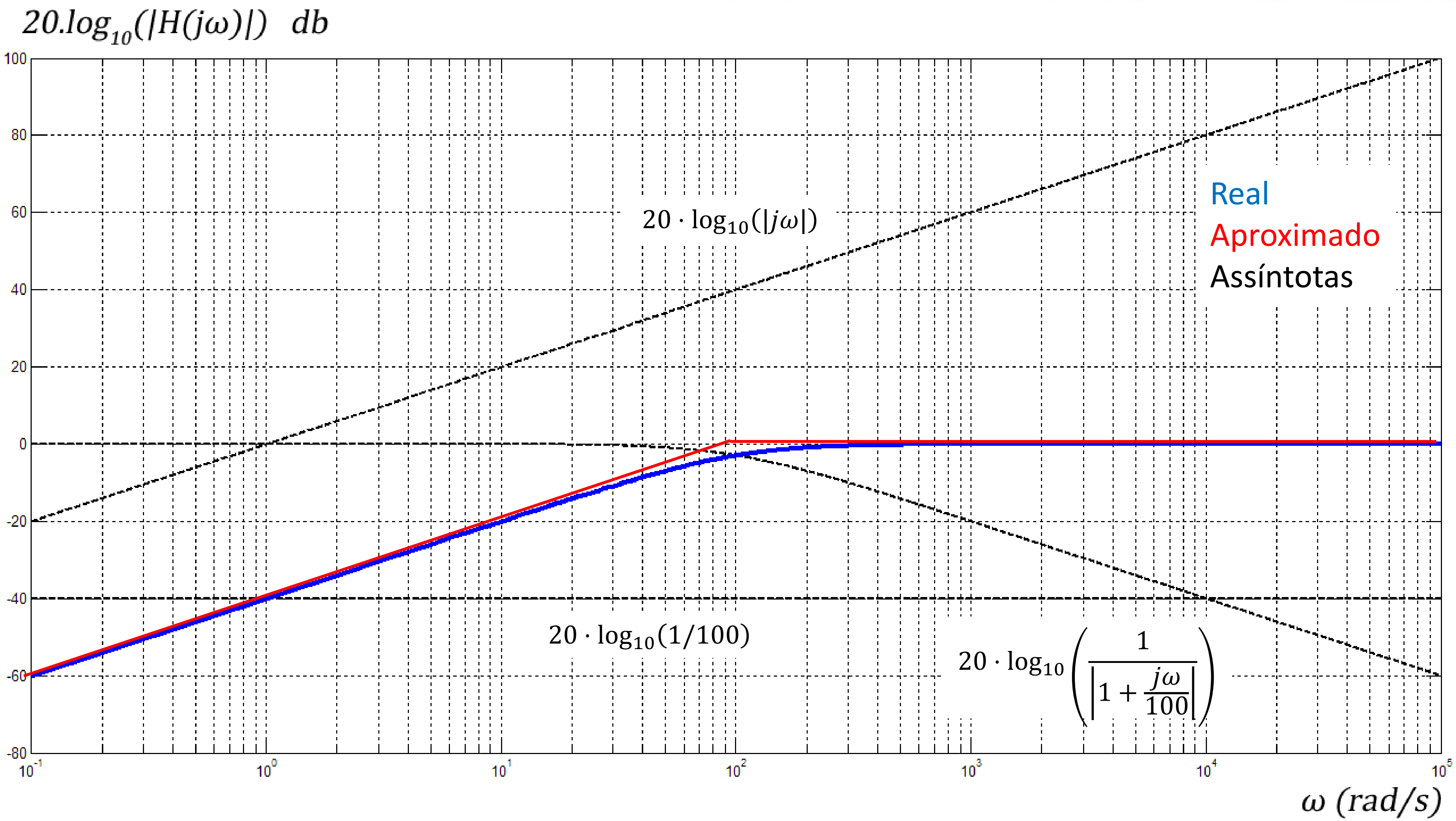
$$20 \cdot \log_{10}(|H(j\omega)|) = 20 \cdot \log_{10}\left(\frac{1}{100} \cdot |j\omega| \cdot \frac{1}{\left|1+\frac{j\omega}{100}\right|}\right)$$

$$20 \cdot \log_{10}(|H(j\omega)|) = 20 \cdot \log_{10}\left(\frac{1}{100}\right) + 20 \cdot \log_{10}(|j\omega|) + 20 \cdot \log_{10}\left(\frac{1}{\left|1+\frac{j\omega}{100}\right|}\right)$$

Bode – Primeira ordem

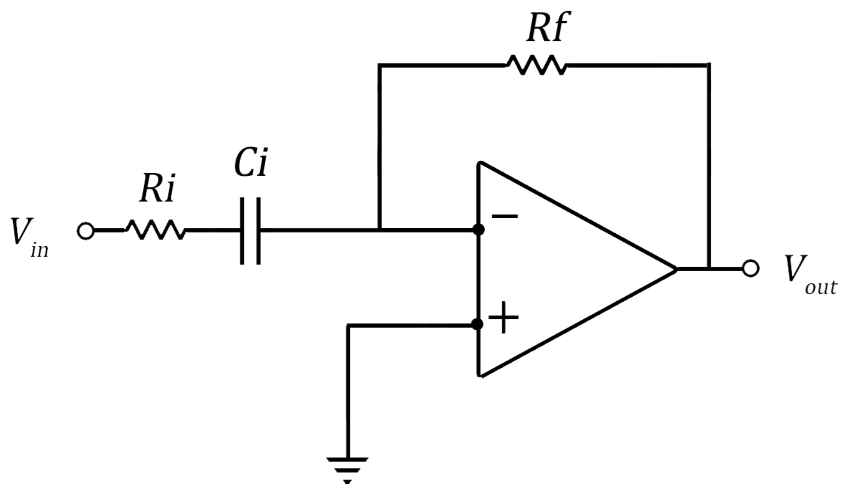


Bode – Primeira ordem



Bode – Primeira ordem

Exercício: Ambos os circuitos são filtros passa altas de primeira ordem, entretanto o filtro a esquerda é um filtro passivo e o filtro da direita um filtro ativo. Encontre a forma padrão da função transferência para ambos os filtros, e trace o diagrama da bode.



$$H(s) = -\frac{R_f}{Z_i} = -\frac{R_f}{\frac{sR_iC_i+1}{sC_i}} = -\frac{sR_fC_i}{sR_iC_i+1}$$

$$H(s) = -\frac{R_f}{R_i}\left(\frac{s}{s+\omega_c}\right)$$

$$H(j\omega) = -\frac{R_f}{R_i}\left(\frac{j\omega}{j\omega+\omega_c}\right) = -\frac{R_f}{R_i}\left(\frac{\frac{j\omega}{\omega_c}}{1+\frac{j\omega}{\omega_c}}\right)$$

Constante (K) igual a –Rf*Ci
Possui um zero na origem
Possui um polo na frequência 1/RiCi

$$\omega_c = \frac{1}{R_iC_i}$$

O ganho tende a –Rf/Ri
Se $\omega \to \infty$

Bode – Primeira ordem

Exercício: Ambos os circuitos são filtros passa altas de primeira ordem, entretanto o filtro a esquerda é um filtro passivo e o filtro da direita um filtro ativo. Encontre a forma padrão da função transferência para ambos os filtros, e trace o diagrama da bode.

$$R_i = 1\text{K}\Omega \quad , \quad R_f = 2K\Omega \quad e \quad C_i = 10\mu F$$

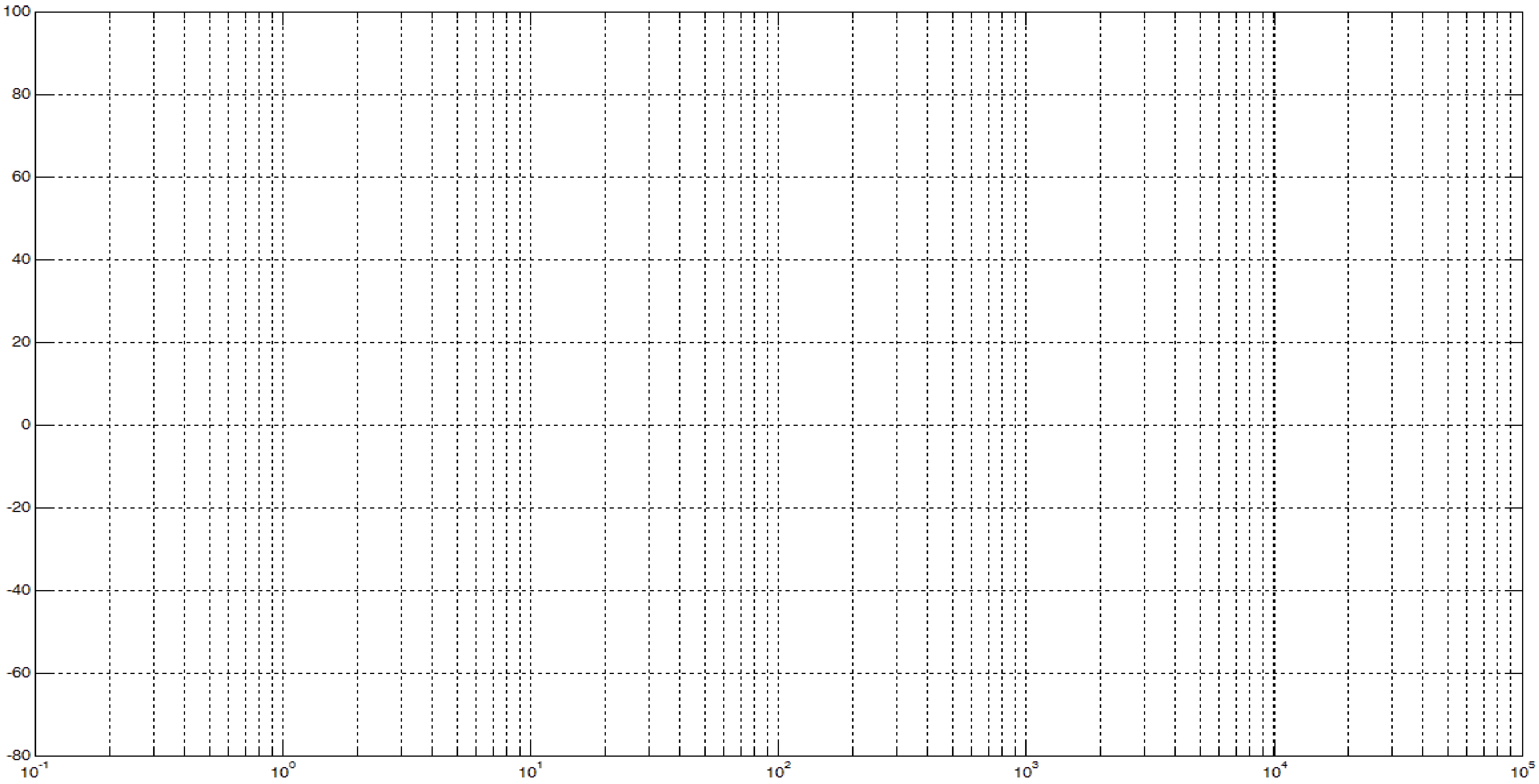
$$\omega_c = \frac{1}{R_i C_i} = \frac{1}{1 \cdot 10^3 \cdot 10 \cdot 10^{-6}} = 100$$

$$H(j\omega) = -\frac{R_f}{R_i}\left(\frac{\frac{j\omega}{\omega_c}}{1 + \frac{j\omega}{\omega_c}}\right) = -0{,}02\frac{j\omega}{1 + \frac{j\omega}{100}}$$

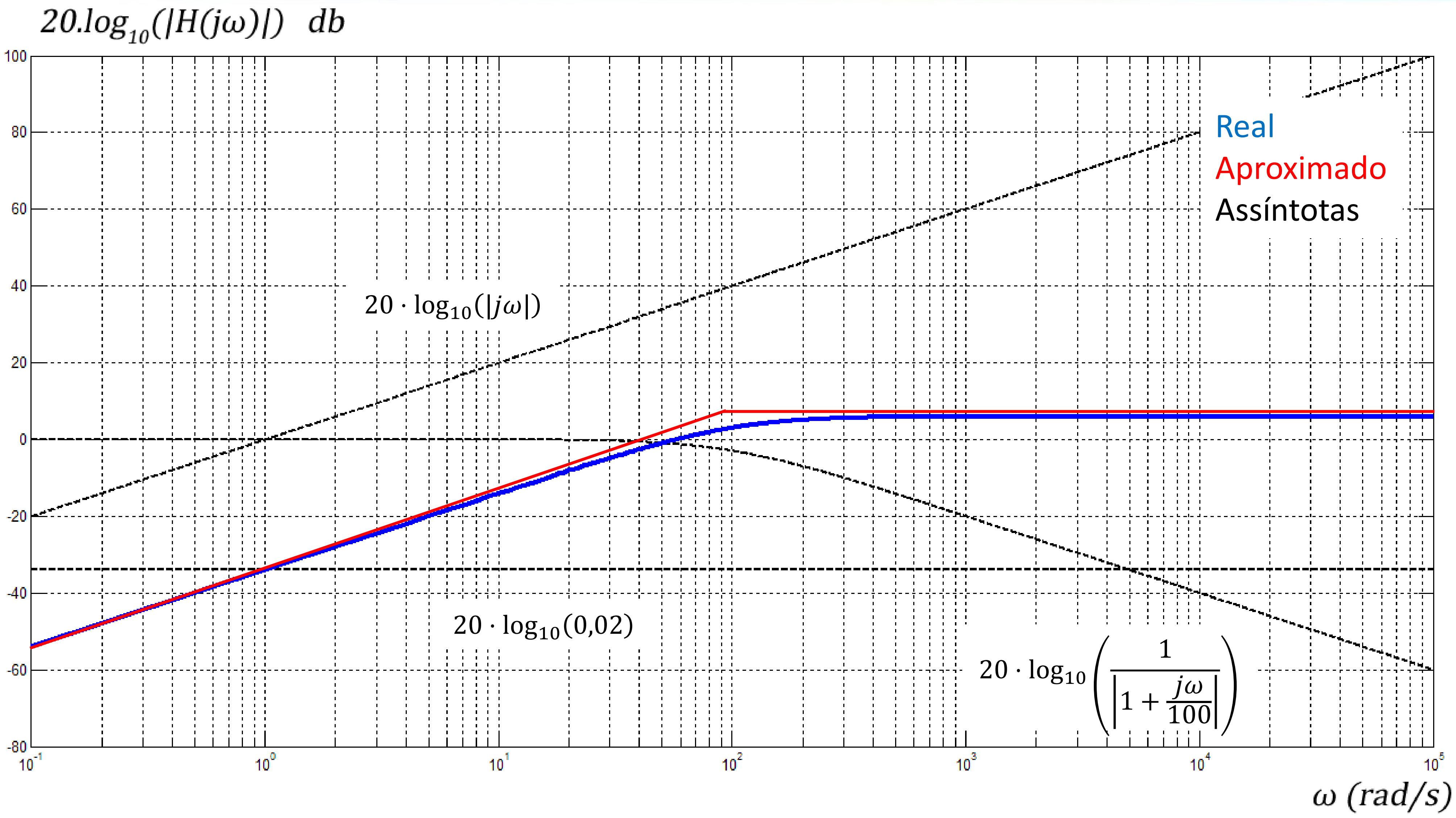
$$20 \cdot \log_{10}(|H(j\omega)|) = 20 \cdot \log_{10}\left(-0{,}02 \cdot |j\omega| \cdot \frac{1}{\left|1+\frac{j\omega}{100}\right|}\right)$$

$$20 \cdot \log_{10}(|H(j\omega)|) = 20 \cdot \log_{10}(|-0{,}02|) + 20 \cdot \log_{10}(|j\omega|) + 20 \cdot \log_{10}\left(\frac{1}{\left|1+\frac{j\omega}{100}\right|}\right)$$

Bode – Primeira ordem

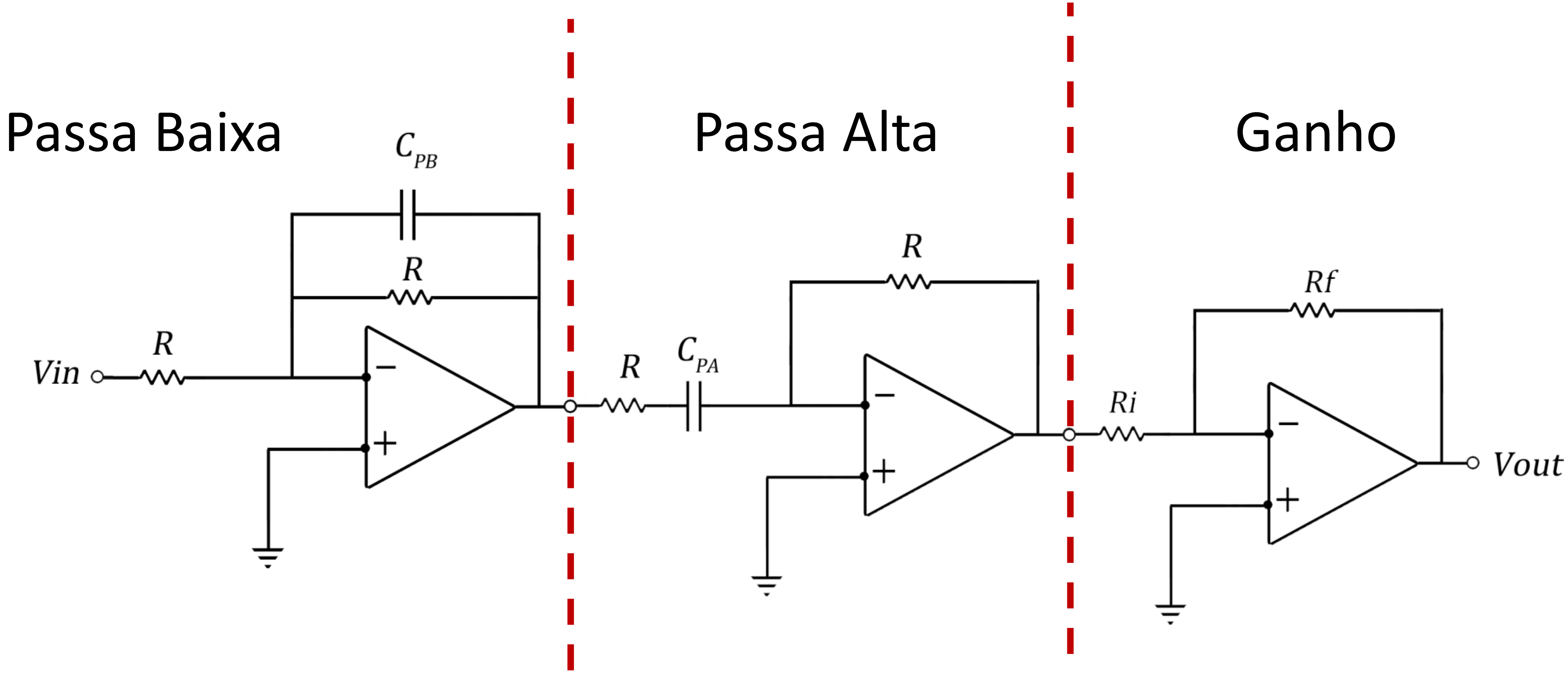


Bode – Primeira ordem



Filtro de segunda ordem – PASSA FAIXA

Como trata-se de uma cascata de AmpOp, a FT é obtida pela multiplicação simples das respostas no domínio da frequência. **É possível criar filtros de ordens superiores utilizando amplificadores operacionais. Estas configurações não necessitam de indutores**



Filtro de segunda ordem – PASSA FAIXA

Calculando o ganho de um filtro passa faixa:

Passa Baixa

$$H(j\omega) = -\frac{1}{1} \cdot \frac{1}{1 + \frac{j\omega}{\omega_{cPB}}}$$

Passa Alta

$$H(j\omega) = -\frac{1}{1}\left(\frac{\frac{j\omega}{\omega_{cPA}}}{1 + \frac{j\omega}{\omega_{cPA}}}\right)$$

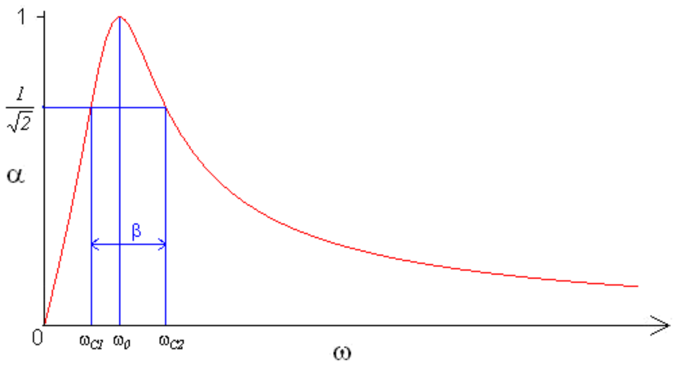
Passa Faixa

$$H(j\omega) = \left(-\frac{R_f}{R_i}\right) \cdot \left(-\frac{1}{1 + \frac{j\omega}{\omega_{CPB}}}\right) \cdot \left(-\frac{\frac{j\omega}{\omega_{cPA}}}{1 + \frac{j\omega}{\omega_{cPA}}}\right)$$

Filtro de segunda ordem – PASSA FAIXA

Calculando o ganho de um filtro passa faixa:

$$H(j\omega) = \left(-\frac{R_f}{R_i}\right) \cdot \left(-\frac{1}{1+\frac{j\omega}{\omega_{CPB}}}\right) \cdot \left(-\frac{\frac{j\omega}{\omega_{cPA}}}{1+\frac{j\omega}{\omega_{cPA}}}\right)$$



$$H(j\omega) = (-K) \cdot \left(\frac{1}{1+\frac{j\omega}{\omega_{CPB}}}\right) \cdot \left(\frac{\frac{j\omega}{\omega_{cPA}}}{1+\frac{j\omega}{\omega_{cPA}}}\right)$$

$$H(j\omega) = (-K \cdot \omega_{CPB}) \cdot \left(\frac{1}{\omega_{CPB}+j\omega}\right) \cdot \left(\frac{j\omega}{\omega_{cPA}+j\omega}\right)$$

Sabemos que:

$$\omega_o = \sqrt{\omega_{CPB} \cdot \omega_{CPA}}$$

Média Geométrica

Filtro de segunda ordem – PASSA FAIXA

Calculando o ganho de um filtro passa faixa:

$$H(j\omega_o) = \frac{-K \cdot \omega_{CPB} \cdot j\omega_o}{(\omega_{CPB} + j\omega_o) \cdot (\omega_{CPA} + j\omega_o)}$$

$$|H(j\omega_o)| = \frac{K \cdot \omega_{CPB} \cdot \omega_o}{\sqrt{\omega_{CPB}^2 + \omega_o^2} \cdot \sqrt{\omega_{CPA}^2 + \omega_o^2}} = \frac{K \cdot \omega_{CPB} \cdot \omega_o}{\sqrt{(\omega_{CPB}^2 + \omega_o^2) \cdot (\omega_{CPA}^2 + \omega_o^2)}}$$

$$|H(j\omega_o)| = \frac{K \cdot \omega_{CPB} \cdot \omega_o}{\sqrt{\omega_{CPB}^2 \cdot \omega_{CPA}^2 + \omega_{CPB}^2 \cdot \omega_o^2 + \omega_o^2 \cdot \omega_{CPA}^2 + \omega_o^4}}$$

$$\boxed{\omega_o = \sqrt{\omega_{CPB} \cdot \omega_{CPA}}}$$

$$|H(j\omega_o)| = \frac{K \cdot \omega_{CPB} \cdot \omega_o}{\sqrt{\omega_o^4 + \omega_{CPB}^2 \cdot \omega_o^2 + \omega_o^2 \cdot \omega_{CPA}^2 + \omega_o^4}}$$

Filtro de segunda ordem – PASSA FAIXA

Calculando o ganho de um filtro passa faixa:

$$|H(j\omega_o)| = \frac{K \cdot \omega_{CPB} \cdot \omega_o}{\sqrt{\omega_o^4 + \omega_{CPB}^2 \cdot \omega_o^2 + \omega_o^2 \cdot \omega_{CPA}^2 + \omega_o^4}} = \frac{K \cdot \omega_{CPB} \cdot \omega_o}{\sqrt{2\omega_o^4 + \omega_{CPB}^2 \cdot \omega_o^2 + \omega_o^2 \cdot \omega_{CPA}^2}}$$

$$|H(j\omega_o)| = \frac{K \cdot \omega_{CPB} \cdot \omega_o}{\sqrt{\omega_o^2 \cdot (2\omega_o^2 + \omega_{CPA}^2 + \omega_{CPB}^2)}} = \frac{K \cdot \omega_{CPB} \cdot \omega_o}{\sqrt{\omega_o^2 \cdot (\omega_{CPA} + \omega_{CPB})^2}} = \frac{\boldsymbol{K \cdot \omega_{CPB}}}{\boldsymbol{\omega_{CPA} + \omega_{CPB}}}$$

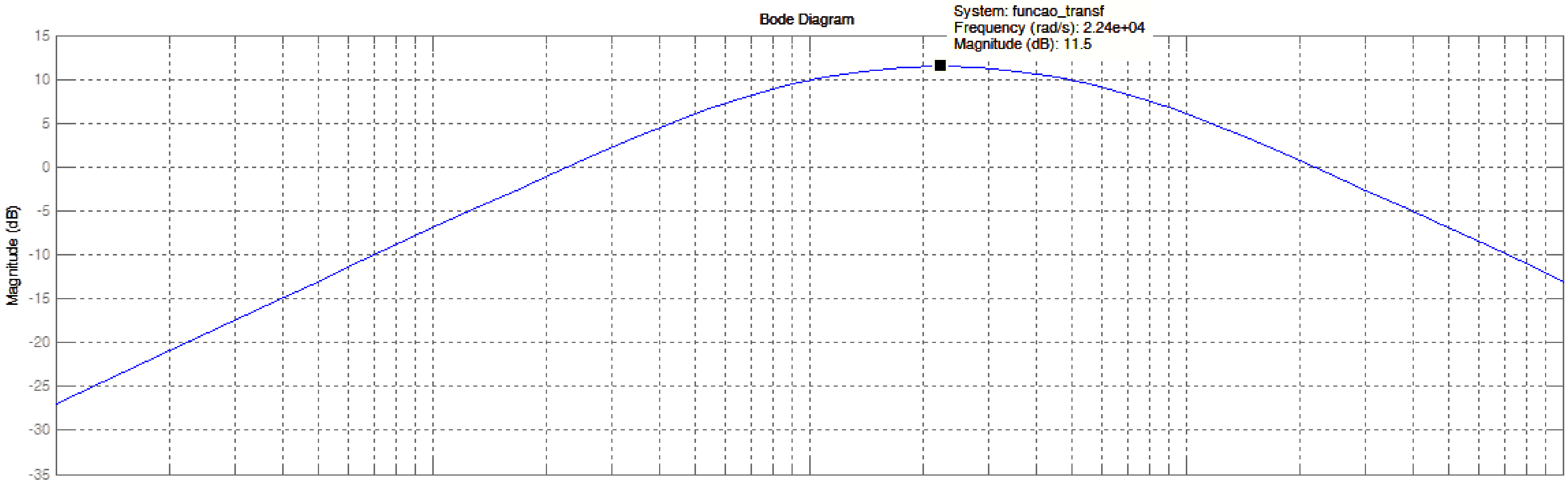
Desta forma, o módulo da função transferência de um filtro passa-faixa na frequência de ressonância será igual a:

$$|H(j\omega_o)| = \frac{R_f}{R_s} \cdot \left(\frac{\omega_{CPB}}{\omega_{CPA} + \omega_{CPB}}\right)$$

Filtro de segunda ordem – PASSA FAIXA

Exercício: Este é o diagrama de bode (magnitude) de um filtro passa faixa, de acordo com o esquema vista anteriormente, com: $\omega_{PA} = 10K\ rad/seg$, $\omega_{PB} = 50 rad/seg$ e $R_f/R_s = 4{,}5$ O cursor está posicionado sobre a frequência de ressonância, verifique se o gráfico está condizente.

$\boldsymbol{\omega = 2,24e + 04}$
$\boldsymbol{(dB): 11,5}$



Filtro de segunda ordem – PASSA FAIXA

Exercício: Este é o diagrama de bode (magnitude) de um filtro passa faixa, de acordo com o esquema vista anteriormente, com: $\omega_{PA} = 10K\ rad/seg$, $\omega_{PB} = 50rad/seg$ e $R_f/R_s = 4{,}5$ O cursor está posicionado sobre a frequência de ressonância, verifique se o gráfico está condizente.

$\boldsymbol{\omega = 2,24e + 04}$
$\boldsymbol{(dB): 11,5}$

$$|H(j\omega_o)| = \frac{R_f}{R_s} \cdot \left(\frac{\omega_{CPB}}{\omega_{CPA} + \omega_{CPB}} \right)$$

$$|H(j\omega_o)| = 4{,}5 \cdot \left(\frac{50000}{10000 + 50000} \right) = 3{,}75$$

$$\omega_o = \sqrt{10000 \cdot 50000} = 22{,}4K\ rad/seg$$

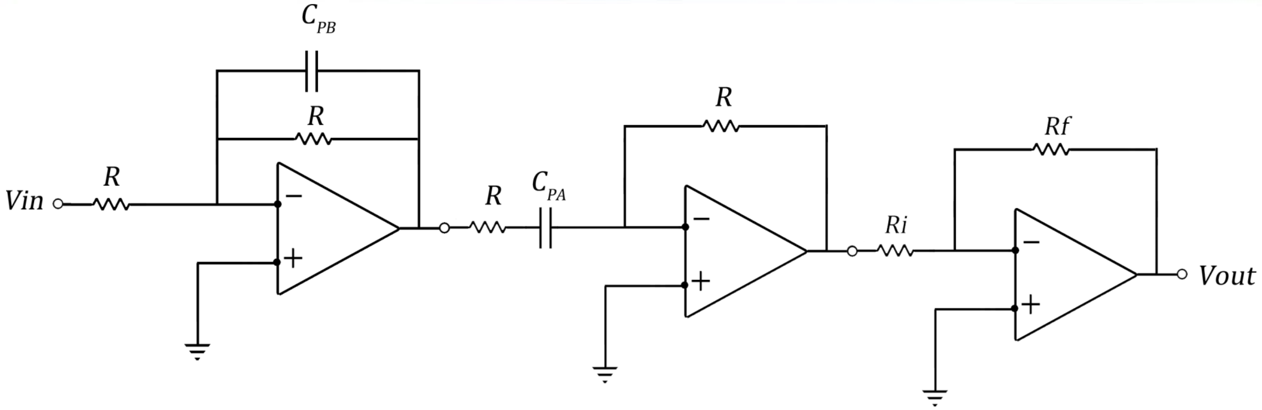
$$20 \cdot \log_{10}(x) = 11{,}5$$

$$\log_{10}(x) = \frac{11{,}5}{20} = 0{,}575$$

$$x = 10^{0{,}575} \cong 3{,}75$$

$$\boldsymbol{OK}$$

Bode – Segunda ordem – Passa faixa ativo



Considerando:

$$R_f = 10K\Omega \ ; \ R_i = 1K\Omega$$
$$R = 100K\Omega$$
$$C_{PB} = 20nF$$
$$C_{PA} = 1\mu F$$

$$\omega_{PB} = 500rad/s$$

$$\omega_{PA} = 10rad/s$$

$$\omega_{PA} < \omega_{PB}$$

$$H(j\omega) = \left(-\frac{R_f}{R_i}\right) \cdot \left(\frac{1}{1 + \frac{j\omega}{\omega_{CPB}}}\right) \cdot \left(\frac{\frac{j\omega}{\omega_{cPA}}}{1 + \frac{j\omega}{\omega_{cPA}}}\right)$$

$$H(j\omega) = \left(-\frac{10}{10}\right) \cdot \left(\frac{1}{1 + \frac{j\omega}{500}}\right) \cdot \left(\frac{j\omega}{1 + \frac{j\omega}{10}}\right)$$

$$20 \cdot \log_{10}(|H(j\omega)|) = 20 \cdot \log_{10}\left(\left(\left|-\frac{10}{10}\right|\right) \cdot \left(\frac{1}{\left|1 + \frac{j\omega}{500}\right|}\right) \cdot \left(\frac{|j\omega|}{\left|1 + \frac{j\omega}{10}\right|}\right)\right)$$

Bode – Segunda ordem – Passa faixa ativo

$$20 \cdot \log_{10}(|H(j\omega)|) = 20 \cdot \log_{10}\left((|-1|) \cdot \left(\frac{1}{\left|1+\frac{j\omega}{500}\right|}\right) \cdot \left(\frac{|j\omega|}{\left|1+\frac{j\omega}{10}\right|}\right)\right)$$

$$20 \cdot \log_{10}(|H(j\omega)|) =$$

1 $20 \cdot \log_{10}((|-1|)) +$

2 $20 \cdot \log_{10}\left(\frac{1}{\left|1+\frac{j\omega}{500}\right|}\right) +$

3 $20 \cdot \log_{10}(|j\omega|) +$

4 $20 \cdot \log_{10}\left(\frac{1}{\left|1+\frac{j\omega}{10}\right|}\right)$

1 $= 0db$

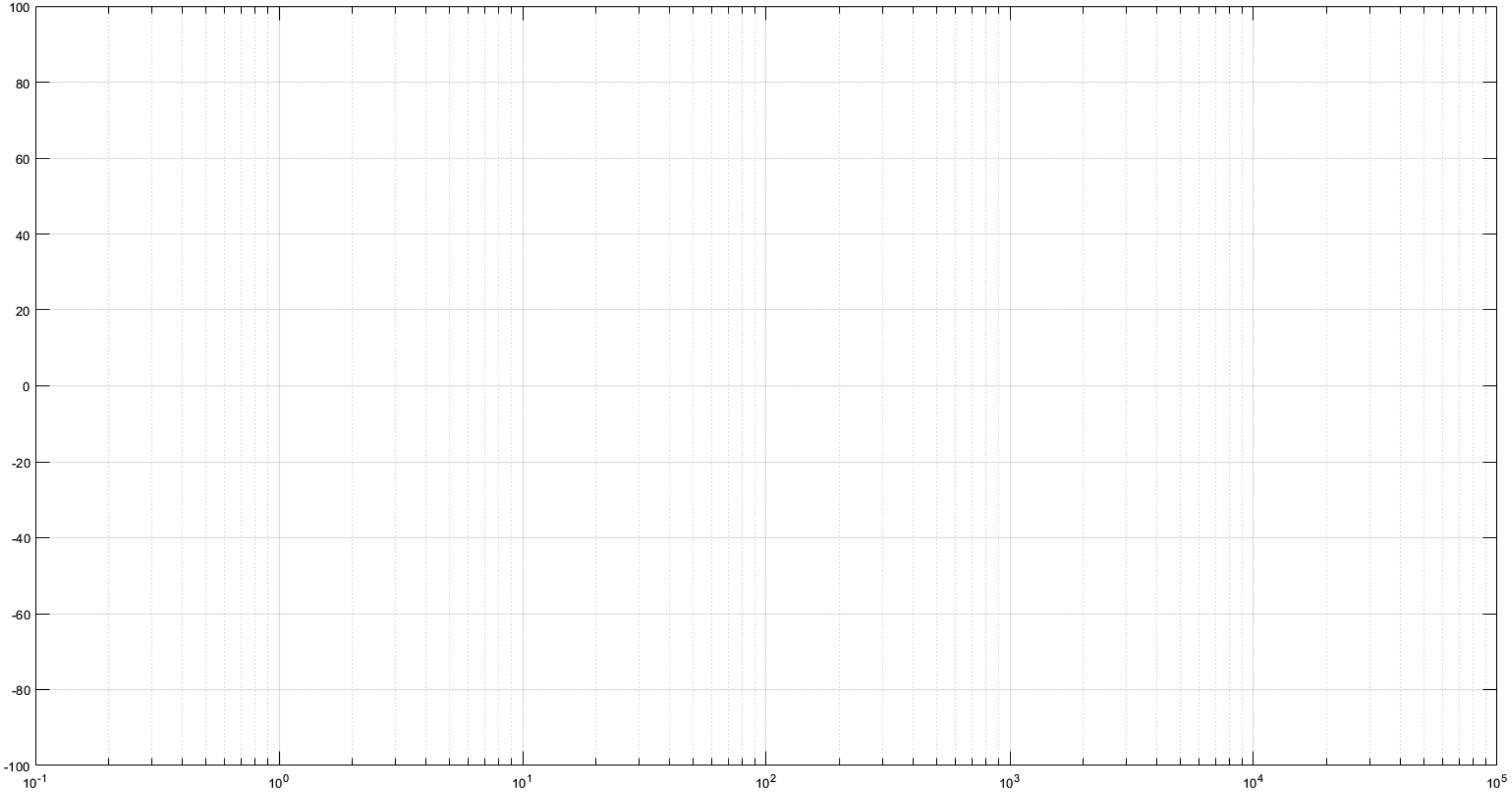
$R_f = 10K\Omega$
$R_i = 1K\Omega$
$R = 100K\Omega$
$C_{PB} = 10\text{n}F$
$C_{PA} = 1\mu F$

$\omega_{PB} = 500rad/s$
$\omega_{PA} = 10rad/s$
$\omega_{PA} < \omega_{PB}$

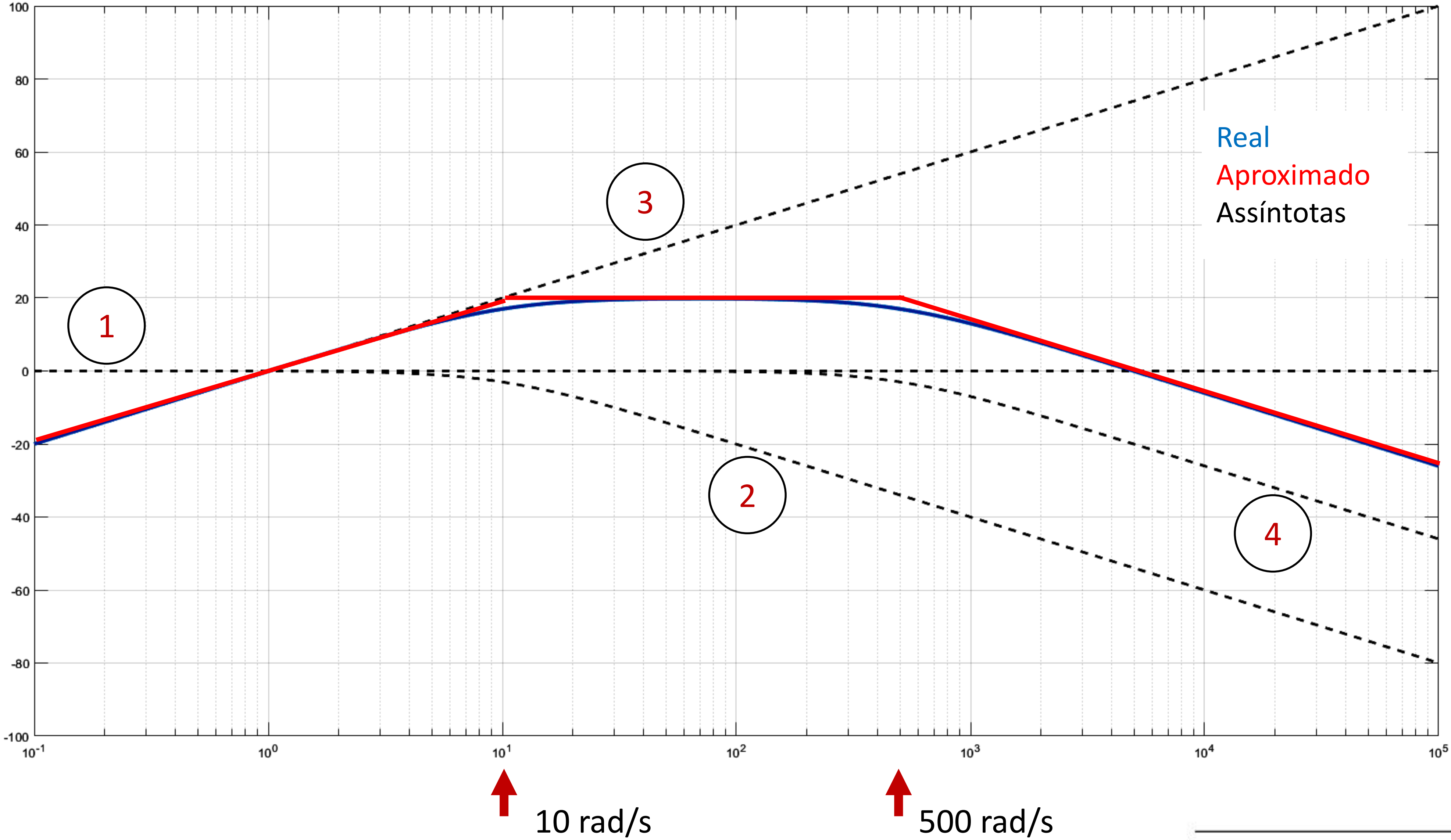
1 Constante / 1 zero na origem / 2 polos (frequência de corte passa altas e frequência de corte passa baixas)

Para avaliar a resposta deste filtro é necessário traçar as 4 assíntotas listadas a esquerda

Bode – Segunda ordem – Passa faixa ativo



Bode – Segunda ordem – Passa faixa ativo



Bode – Segunda ordem – Passa faixa ativo

Gerar bode (magnitude) com assíntotas

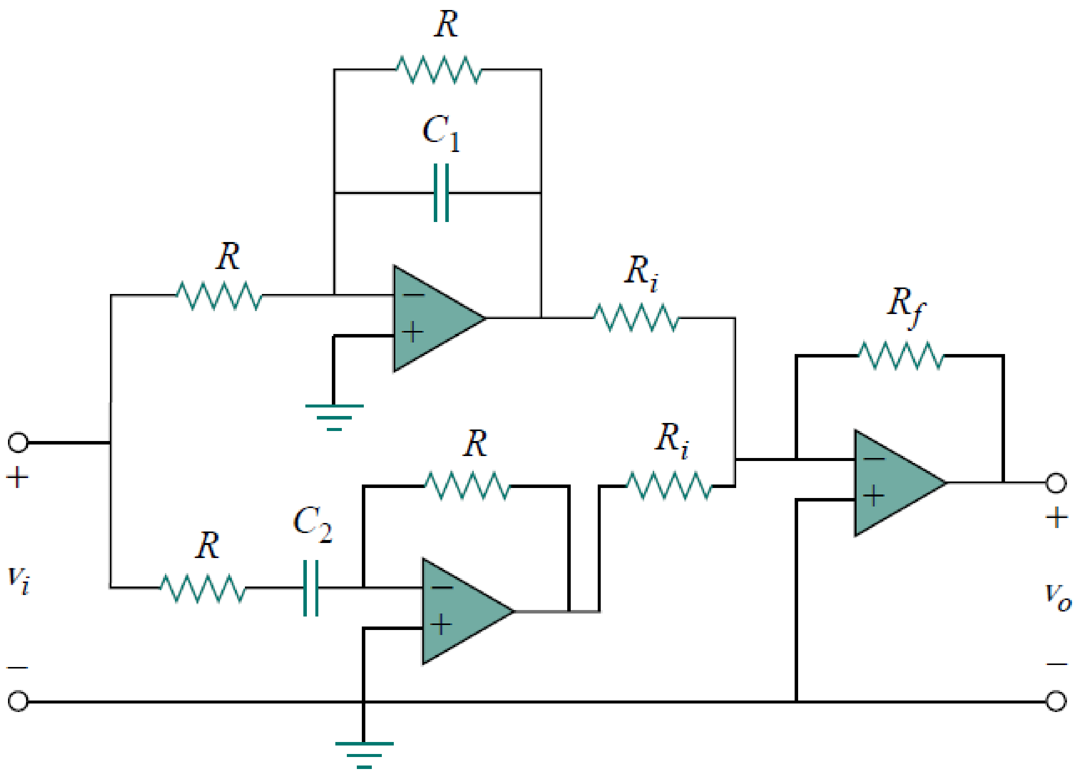
```
w_inicio = 1e-1;
w_fim = 1e5;
pontos = 100000;

R_PA = 100e3;
C_PA = 1e-6;

R_PB = 100e3;
C_PB = 20e-9;

Rf = 10e3;
Rs = 1e3;

w_PA= 1/(R_PA*C_PA);
w_PB= 1/(R_PB*C_PB);

A = Rf/Rs;

w=linspace(w_inicio,w_fim,pontos);

assint_cte=linspace(-A*(1/w_PA),-A*(1/w_PA),pontos);

db1=20*log10(abs(assint_cte));
db2=20*log10(1./abs(1+1i*w/w_PA));
db3=20*log10(1./abs(1+1i*w/w_PB));
db4=20*log10(w);

db=db1+db2+db3+db4;

semilogx(w,db1,'k--','LineWidth',2);
hold on
semilogx(w,db2,'k--','LineWidth',2);
semilogx(w,db3,'k--','LineWidth',2);
semilogx(w,db4,'k--','LineWidth',2);
semilogx(w,db,'-','LineWidth',3);
grid
```

Curvas de bode

```
R_PA = 100e3;
C_PA = 1e-6;

R_PB = 100e3;
C_PB = 20e-9;

Rf = 1e3;
Rs = 1e3;

w_PA= 1/(R_PA*C_PA);
w_PB= 1/(R_PB*C_PB);

A = Rf/Rs;

num = A*w_PB*[1 0];
den = conv([1 w_PB],[1 w_PA]);
funcao_transf = tf(num,den)

bode(funcao_transf)
grid
```

Bode – Segunda ordem – Raízes complexas conjugadas

Filtro rejeita faixa – ativo – de segunda ordem



$$H(s) = \frac{R_f}{R_s} \cdot \left(\frac{1}{1 + \frac{s}{\omega_{PB}}} + \frac{\frac{s}{\omega_{PA}}}{1 + \frac{s}{\omega_{PA}}} \right)$$

$$H(s) = \frac{R_f}{R_s} \cdot \left(\frac{1 + \frac{s}{\omega_{PA}} + \left(\frac{s}{\omega_{PA}}\right) \cdot \left(1 + \frac{s}{\omega_{PB}}\right)}{\left(1 + \frac{s}{\omega_{PB}}\right) \cdot \left(1 + \frac{s}{\omega_{PA}}\right)} \right)$$

$$H(s) = \frac{R_f}{R_s} \cdot \left(\frac{s^2 \left(\frac{1}{\omega_{PA} \cdot \omega_{PB}}\right) + 2s\left(\frac{1}{\omega_{PA}}\right) + 1}{\left(1 + \frac{s}{\omega_{PB}}\right) \cdot \left(1 + \frac{s}{\omega_{PA}}\right)} \right)$$

$$\omega_{PB} = \frac{1}{RC_1} \qquad \omega_{PA} = \frac{1}{RC_2}$$

** Modelo didático

Bode – Segunda ordem – Raízes complexas conjugadas

Considere a função transferência com polos complexos conjugados

$$H(s) = \frac{K}{(s+\alpha-j\beta)(s+\alpha+j\beta)}$$

Podemos reescrever o produto para:

$$(s+\alpha)^2+\beta^2 = s^2+2\alpha s+\alpha^2+\beta^2$$

Considerando a forma quadrática (mais adequada)

$$s^2+2\alpha s+\alpha^2+\beta^2 = s^2+2\,\xi\omega_n s+\omega_n^2$$

Onde:

$$\omega_n^2 = \alpha^2+\beta^2$$

$$\xi\omega_n = \alpha$$

Sabemos que :

$$p_{1,2} = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$$

$$p_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \sqrt{(\xi\omega_n)^2-\omega_n^2}$$

$\xi \rightarrow Fator\ de\ amortecimento$
$\omega_n \rightarrow Freq.\ de\ corte\ do\ termo\ quadrático$

$\boldsymbol{\xi = 1} \rightarrow \boldsymbol{Valor\ crítico}\ (\boldsymbol{reais\ iguais})$

$\boldsymbol{\xi < 1} \rightarrow \boldsymbol{Complexas\ conjugadas}$

$\boldsymbol{\xi > 1} \rightarrow \boldsymbol{Reais\ distintas}$

Bode – Segunda ordem – Raízes complexas conjugadas

$$H(s) = \frac{K}{(s+\alpha-j\beta)(s+\alpha+j\beta)}$$

$$\omega_n^2 = \alpha^2 + \beta^2$$

$$\xi\omega_n = \alpha$$

$$H(s) = \frac{K}{s^2 + 2\,\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

Evidenciando a freq. de corte do termo quadrático

$$H(s) = \frac{K}{\omega_n^2} \cdot \frac{1}{\left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2 + 2\frac{\xi s}{\omega_n} + 1}$$

Evidenciando a freq. de corte do termo quadrático

$$H(j\omega) = \frac{K_o}{1 - (\omega/\omega_n)^2 + j\left(\frac{2\xi\omega}{\omega_n}\right)} \qquad K_o = \frac{K}{\omega_n^2}$$

Por conveniência consideramos:

$$u = \frac{\omega}{\omega_n}$$

Freq. de entrada por
Freq. de corte

$$H(j\omega) = \frac{K_o}{1 - u^2 + j2\xi u}$$

Analisando o módulo temos:

$$|H(j\omega)| = \frac{K_o}{|1 - u^2 + j2\xi u|}$$

Bode – Segunda ordem – Raízes complexas conjugadas

$$H(j\omega) = \frac{K_o}{1 - u^2 + j2\xi u} \qquad u = \frac{\omega}{\omega_n}$$

$$|H(j\omega)| = |K_o| \cdot \frac{1}{|1 - u^2 + j2\xi u|} \qquad K_o = \frac{K}{\omega_n^2}$$

Se $u \rightarrow 0$ então consideramos que $\omega \rightarrow 0$

A contribuição do termo quadrático para a amplitude é:

$$\mathbf{20 \cdot \log_{10}\left(\frac{1}{|1 - 0^2 + j2\xi 0|}\right) = 0}$$

Se $u \rightarrow \infty$ então consideramos que $\omega \rightarrow \infty$

$$\mathbf{20 \cdot \log_{10}\left(\frac{1}{|1 - u^2 + j2\xi u|}\right) = -40 \cdot log_{10}(u)}$$

Para simplificarmos a dedução vamos considerar 3 décadas distantes de ω_n:

$\xi = 0{,}1$
$\omega_n = 1$
$\omega_1 = 1000 \rightarrow u = 1000$
$\omega_2 = 10000 \rightarrow u = 10000$
$\omega_3 = 1E5 \rightarrow u = 1E5$

$$20 \cdot \log_{10}\left(\frac{1}{|1 - 1000^2 + j2 \cdot 100|}\right) = -120$$

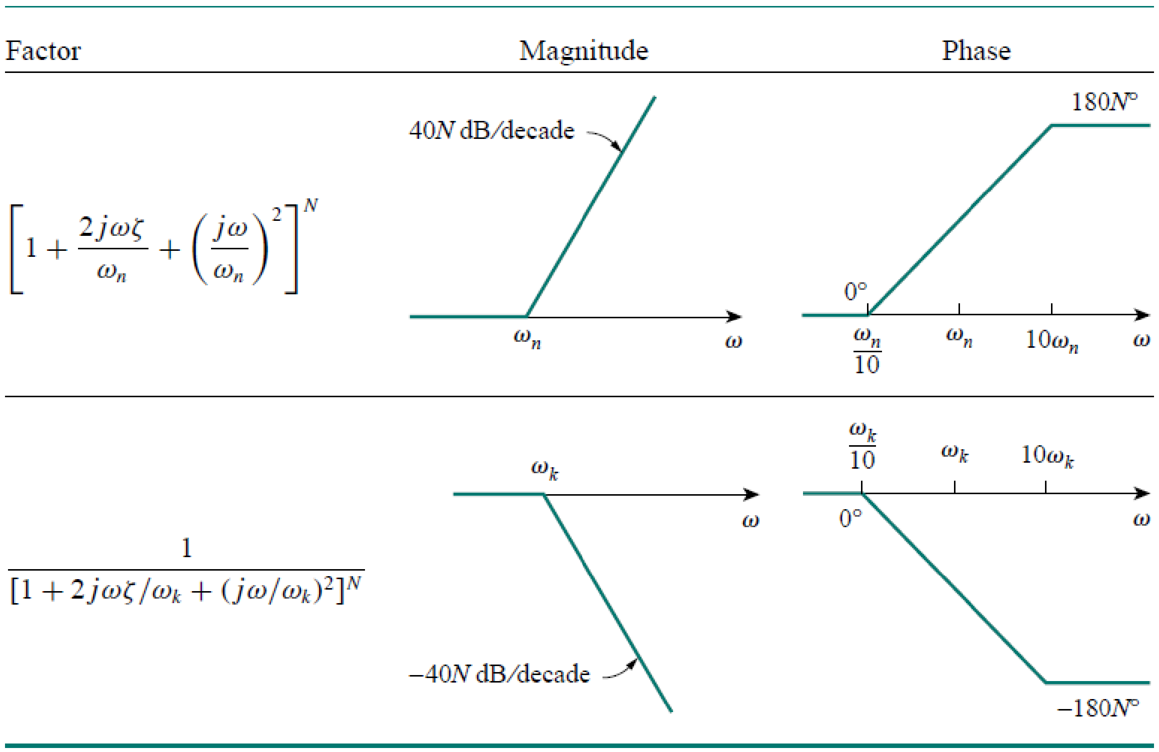
$$20 \cdot \log_{10}\left(\frac{1}{|1 - 10000^2 + j2 \cdot 1000|}\right) = -160$$

$$20 \cdot \log_{10}\left(\frac{1}{|1 - 1E5^2 + j2 \cdot 1E4|}\right) = -200$$

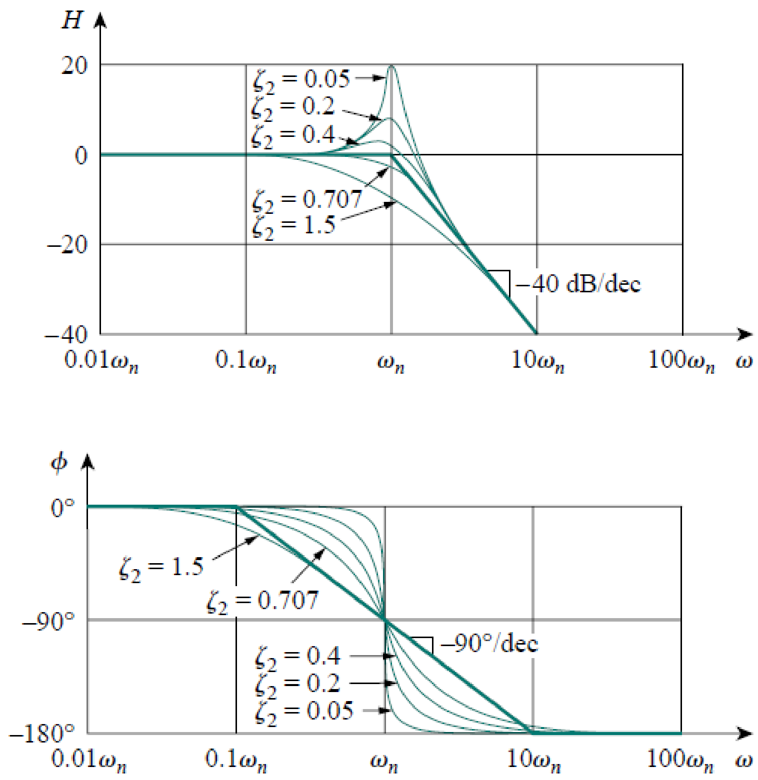
Note que quanto maior o ω a variação por década é de -40db

Bode – Segunda ordem – Raízes complexas conjugadas

Aproximação para freq. do termo quadrático

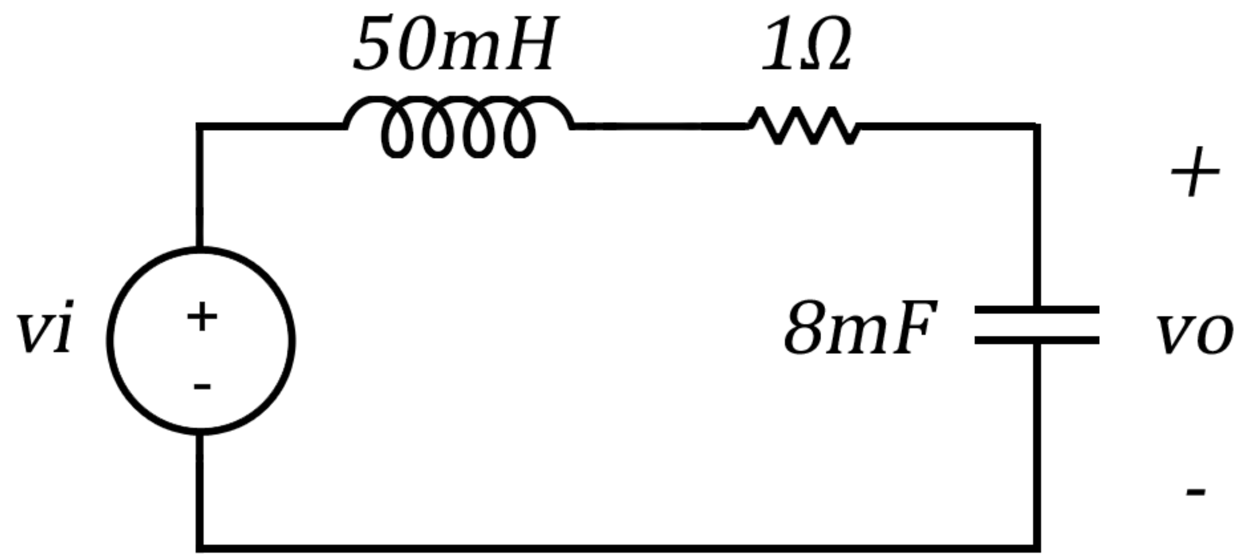


Influência do ξ



Bode – Segunda ordem – Raízes complexas conjugadas

Exercício: Calcule a função transferência do circuito abaixo, trace o gráfico de bode e caracterize o filtro



Bode – Segunda ordem – Raízes complexas conjugadas

$$H(s) = \frac{\frac{1}{sC}}{sL + \frac{1}{sC} + R} = \frac{1}{s^2LC + 1 + sRC} = \frac{\frac{1}{LC}}{s^2 + s\frac{R}{L} + \frac{1}{LC}}$$

$$H(s) = \frac{2500}{s^2 + 20s + 2500}$$

$$H(s) = \frac{K}{s^2 + 2\,\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$\omega_n = \sqrt{2500} = 50rad/seg$$

$$2\,\xi\omega_n = 20 \quad \therefore \quad \xi = \frac{20}{2\cdot 50} = 0{,}20$$

$$H(s) = \frac{K}{\omega_n^2}\cdot\frac{1}{\left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2 + 2\frac{\xi s}{\omega_n} + 1}$$

$$H(s) = \frac{2500}{2500}\cdot\frac{1}{\left(\frac{s}{50}\right)^2 + 2\frac{0{,}2s}{50} + 1}$$

$$H(j\omega) = 1\cdot\frac{1}{\left(\frac{j\omega}{50}\right)^2 + 2\frac{0{,}2j\omega}{50} + 1}$$

Bode – Segunda ordem – Raízes complexas conjugadas

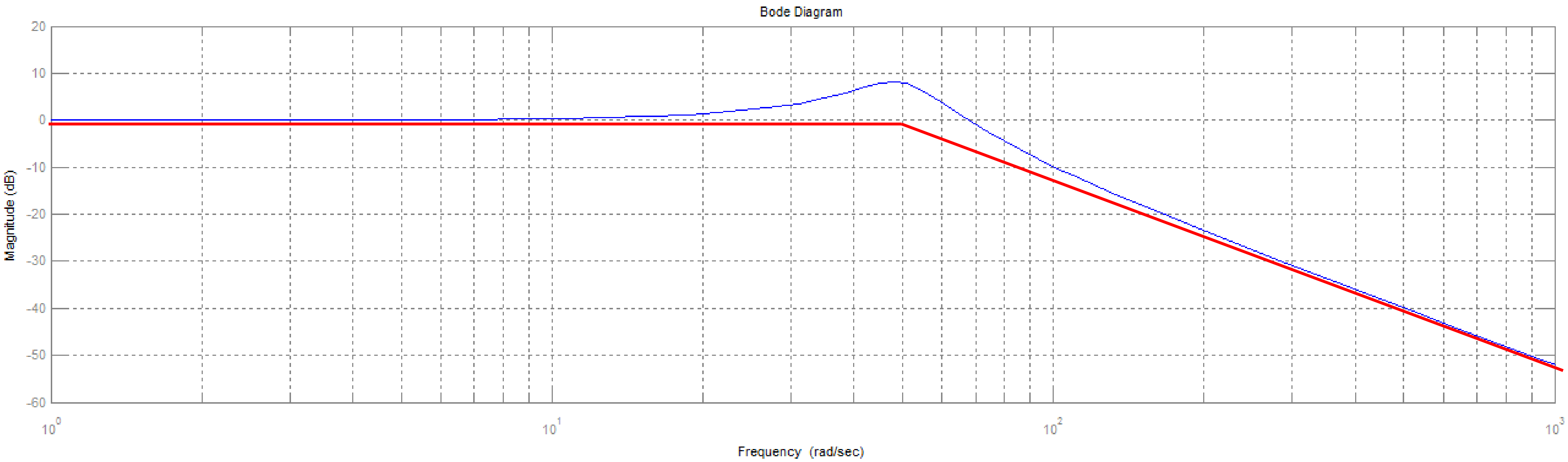
$$H(j\omega) = 1 \cdot \frac{1}{\left(\frac{j\omega}{50}\right)^2 + 2\frac{0{,}2j\omega}{50} + 1}$$

$$\omega_n = 50rad/seg \qquad \xi = 0{,}20$$

$$20 \cdot \log_{10}(|H(j\omega)|) = 20 \cdot \log_{10}\left(\frac{1}{\left|\left(\frac{j\omega}{50}\right)^2 + 2\frac{0{,}2j\omega}{50} + 1\right|}\right)$$

Apenas 1 termo quadrático

Bode – Segunda ordem – Raízes complexas conjugadas



Exemplos de filtros