Aula 19

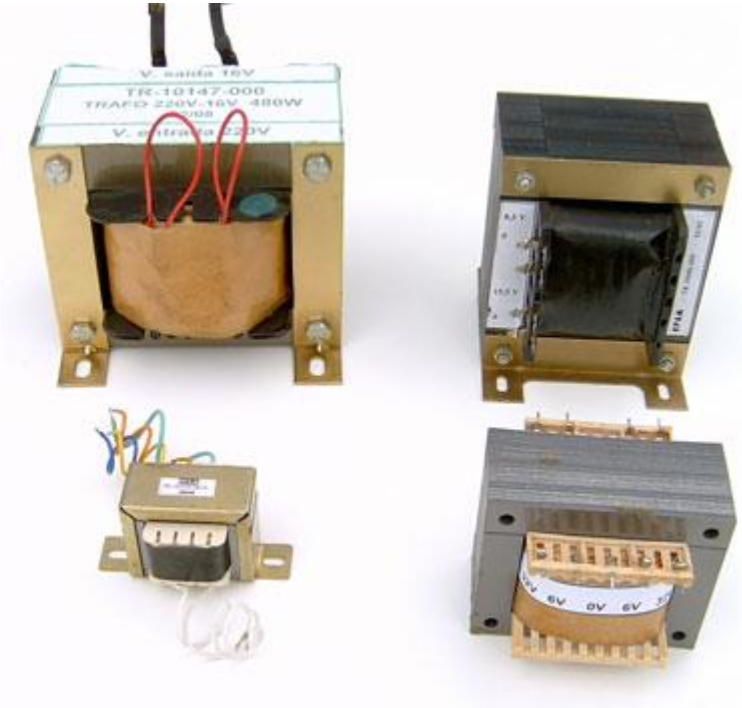
Acoplamento Magnético

Circuitos Elétricos II

Prof. Henrique Amorim - UNIFESP - ICT

Acoplamento Magnético

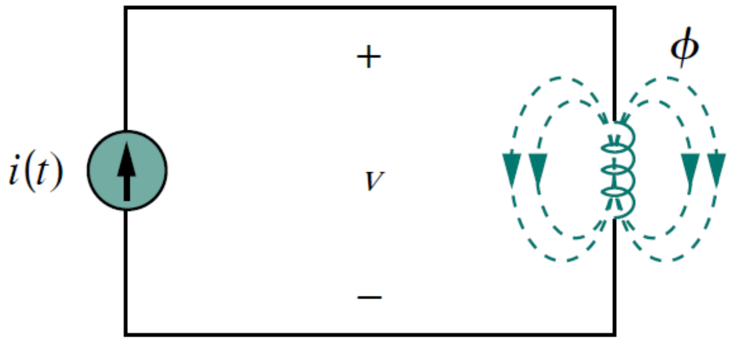
Os circuitos considerados até o momento são descritos pelo acoplamento condutivo, uma vez que a interação entre dois laços é realizada por meio da corrente condução. Quando dois laços, com ou sem contatos, interagem por meio do campo magnético, caracterizamos os circuitos como **acoplamento magnético**.



Acoplamento Magnético

Quando **dois indutores** (bobinas) estão próximos, o **fluxo magnético**, gerado pelo fluxo de cargas, induz uma diferença de potencial na bobina vizinha. Este fenômeno é conhecido por **indutância mútua**.

Considere o indutor ao lado (N espiras). Quando o fluxo de corrente passa através da bobina, gera um campo magnético ϕ. De acordo com as leis de Faraday, a diferença de potencial induzida no indutor é proporcional ao número de espiras N.



O fluxo magnético e o fluxo de corrente possuem uma relação direta, a variação de um interfere no outro. A **indutância** também é conhecida por **autoindutância**, pois relaciona a tensão induzida na bobina pela taxa de variação da corrente (no tempo) da mesma bobina.

$$v_L(t) = L\frac{di}{dt}$$

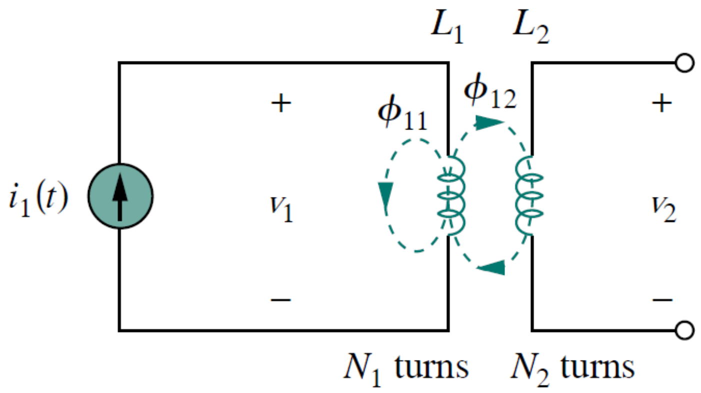
$$L = N\frac{d\phi}{di}$$

$$v_L(t) = N\frac{d\phi}{dt} \quad \rightarrow \quad v_L(t) = N\frac{d\phi}{di}\frac{di}{dt}$$

Acoplamento Magnético

Considere dois indutores próximos entre si. Assumimos que há uma fonte geradora conectada ao primeiro indutor e nenhuma fonte conectada ao segundo. Os indutores possuem indutância (ou autoindutância) L1 e L2 e número de espiras iguais a N1 e N2

O fluxo magnético ϕ_1 possui 2 componentes, cada uma relacionada a um dos indutores



$$\phi_1 = \phi_{11} + \phi_{12}$$

$$v_1(t) = N_1 \frac{d\phi_1}{dt} \quad e \quad v_2(t) = N_2 \frac{d\phi_{12}}{di}$$

$$v_1(t) = N_1 \frac{d\phi_1}{di_1}\frac{di_1}{dt} \quad \rightarrow \quad v_1(t) = L_1 \frac{di_1}{dt}$$

$$v_2(t) = N_2 \frac{d\phi_{12}}{di_1}\frac{di_1}{dt} \quad \rightarrow \quad v_2(t) = M_{21} \frac{di_1}{dt}$$

$$\boldsymbol{M_{21} = N_2 \frac{d\phi_{12}}{di_1}} \quad \rightarrow$$ **Indutância Mútua**

Autoindutância

A indutância mútua é representada pela letra M, neste caso o índice “21” representa que a tensão para o indutor 2 através do indutor 1.

$$M_{21} = N_2 \frac{d\phi_{12}}{di_1}$$

A indutância mútua entre o indutor 1 e 2 ou entre o indutor 2 e 1, armazenam energia sob as mesmas referências, portanto:

$$M_{12} = M_{21} = M$$

Tanto a autoindutância (indutância) “L” como a indutância mútua “**M**” são medidos em **Herry** (H).

Indutância mútua é a capacidade de um indutor induzir tensão em um indutor vizinho

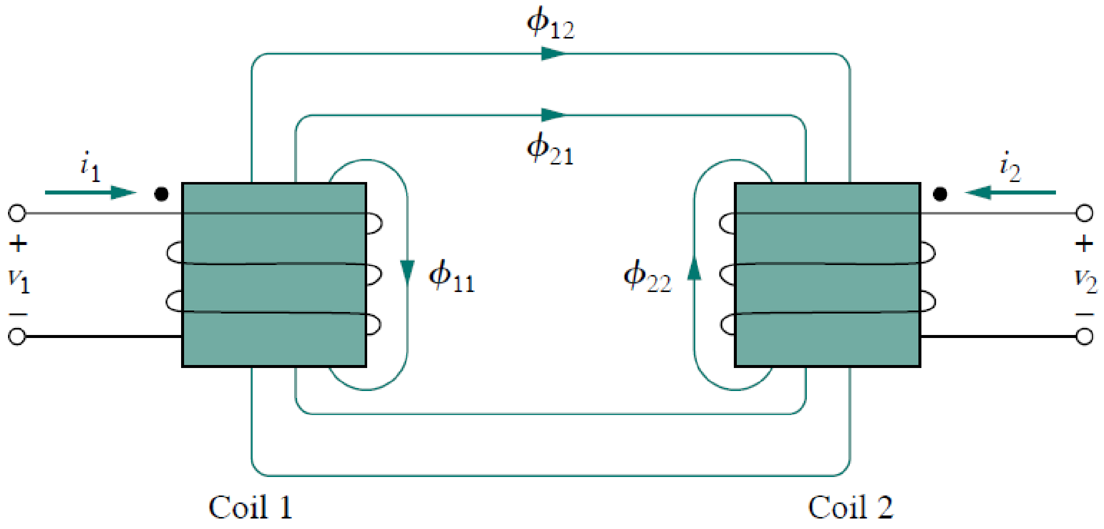
Tensão de autoindutância

Apesar da indutância mutua **M** ser sempre positiva, a tensão mutua **M di/dt** pode ser **negativa ou positiva**, assim como a tensão de autoindutância.

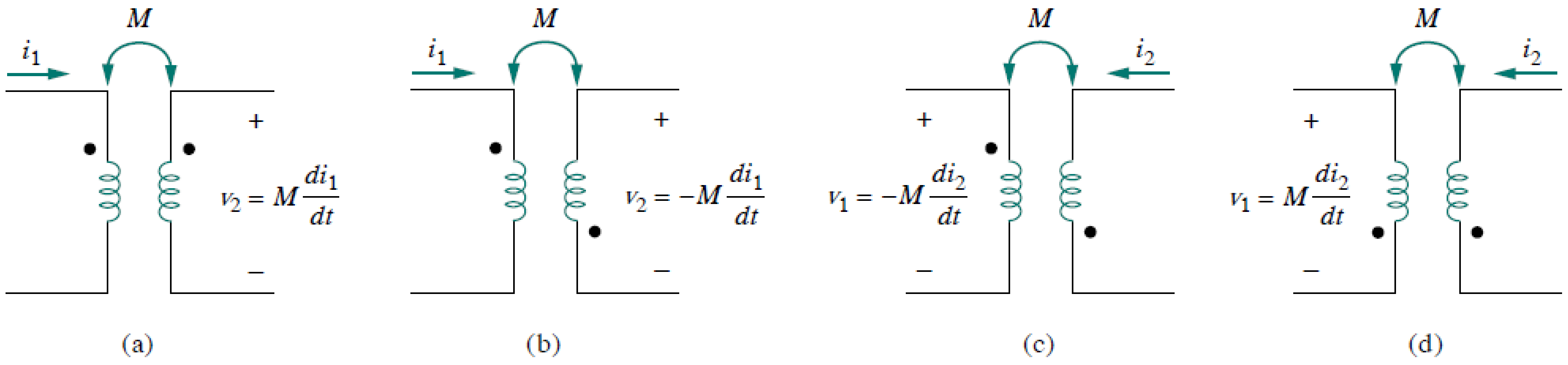
O sinal de referência da tensão no **ACOPLAMENTO CONDUTIVO** é definida pela **CONVENÇÃO PASSIVA**

O sinal de referência da tensão do **ACOPLAMENTO MAGNÉTICO**, é definida pela **CONVENÇÃO DO PONTO** (Leis de Lenz + convecção da regra da mão direita). O ponto indica a direção do fluxo magnético se a corrente entrar pelo terminal do ponto.

A construção física de um circuito de acoplamento magnético deve ser considerada para obter a indutância mútua desejada. Por exemplo, enrolar uma bobina no sentido horário é diferente de enrolar em sentido anti-horário



Convenção do ponto

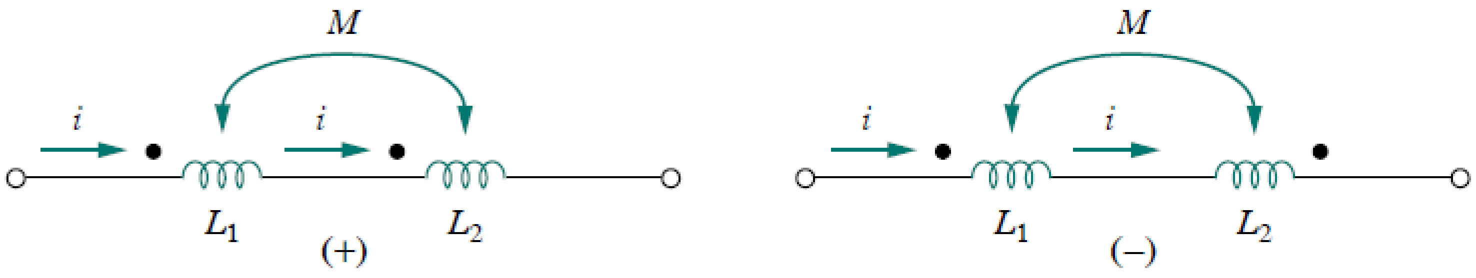


Se uma corrente **ENTRA** pelo terminal da bobina marcado com um ponto, a polaridade de referência da tensão mútua na segunda bobina é **POSITIVA** no terminal da segunda bobina marcado com um ponto – **VER CASO A E B**

Se uma corrente **SAI** pelo terminal da bobina marcado com um ponto, a polaridade de referência da tensão mútua na segunda bobina é **NEGATIVA** no terminal da segunda bobina marcado com um ponto – **VER CASO C E D**

Acoplamento Magnético

Exemplo: Qual a indutância equivalente para os esquemas abaixo $$v = L_{eq}\frac{di}{dt}$$



(a) (b)

$$v = L_1\frac{di}{dt} + M\frac{di}{dt} \qquad + L_2\frac{di}{dt} + M\frac{d_i}{dt}$$

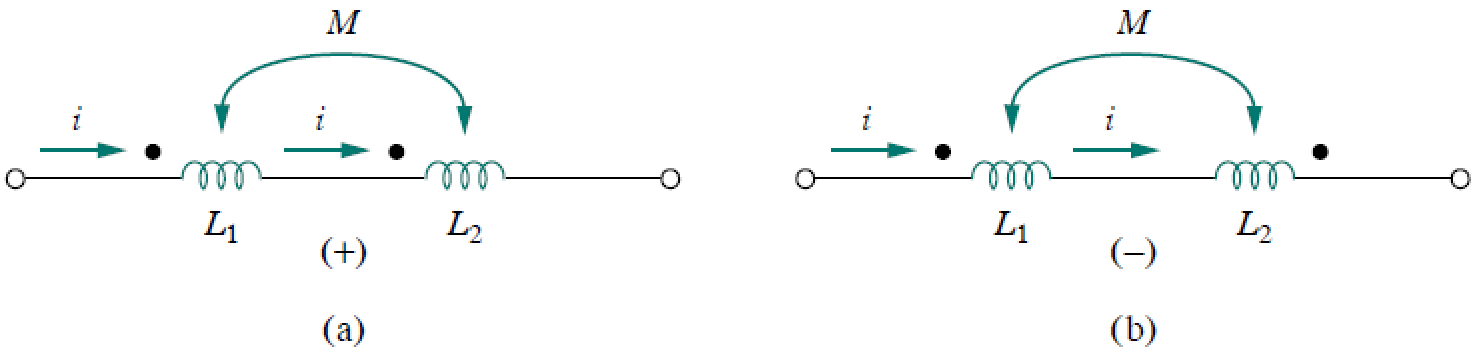
Refaça para o caso B

$$v = (L_1 + L_2 + 2M)\frac{di}{dt}$$

$$L_{eq} = L_1 + L_2 + 2M$$

Acoplamento Magnético

Exemplo: Qual a indutância equivalente em ambos os casos abaixo $$v = L_{eq}\frac{di}{dt}$$



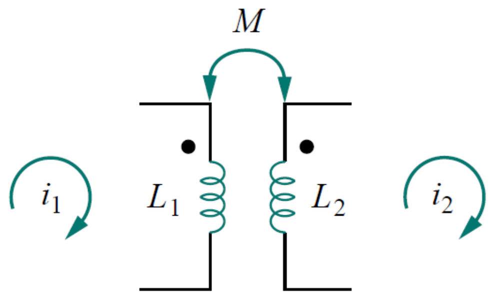
$$v = L_1\frac{di}{dt} - M\frac{di}{dt} \qquad + L_2\frac{di}{dt} - M\frac{d_i}{dt}$$

$$v = (L_1 + L_2 - 2M)\frac{di}{dt}$$

$$L_{eq} = L_1 + L_2 - 2M$$

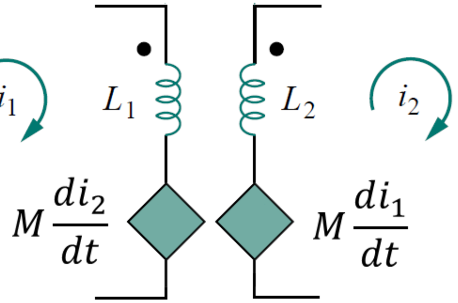
Acoplamento Magnético

1

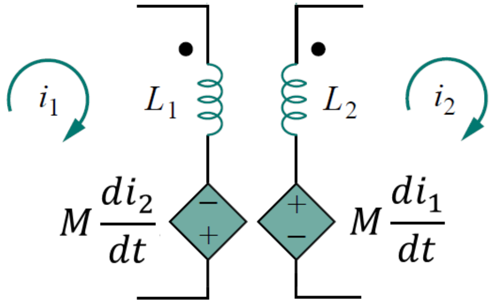


Método para modelar circuitos com acoplamento magnético utilizando fontes de tensão dependente controladas por corrente (FTDCC)

2

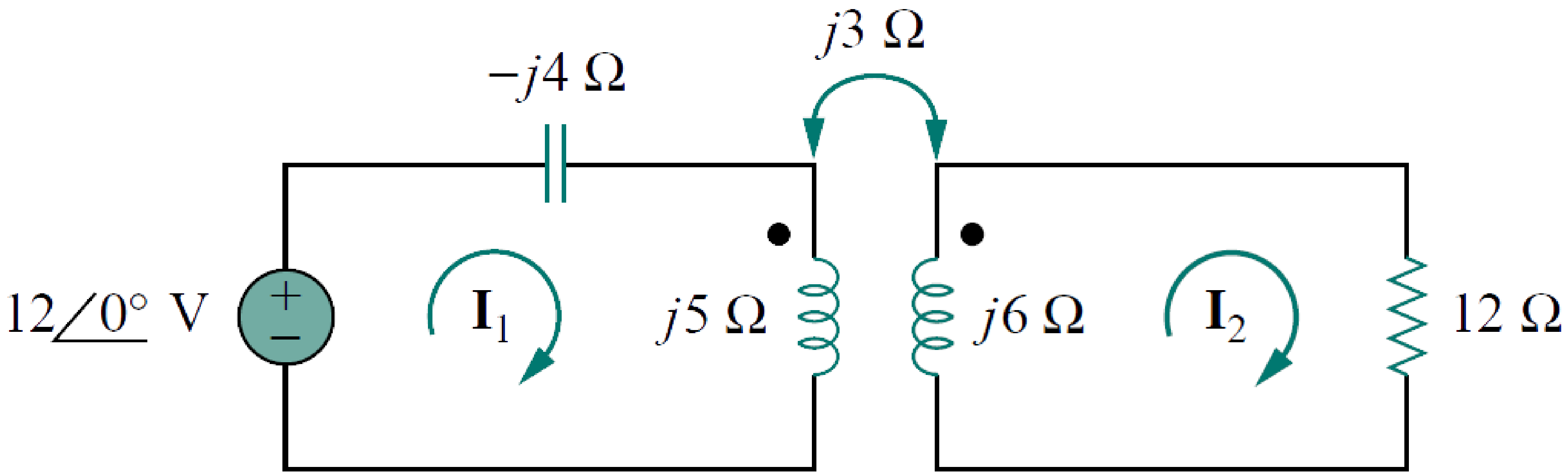


3

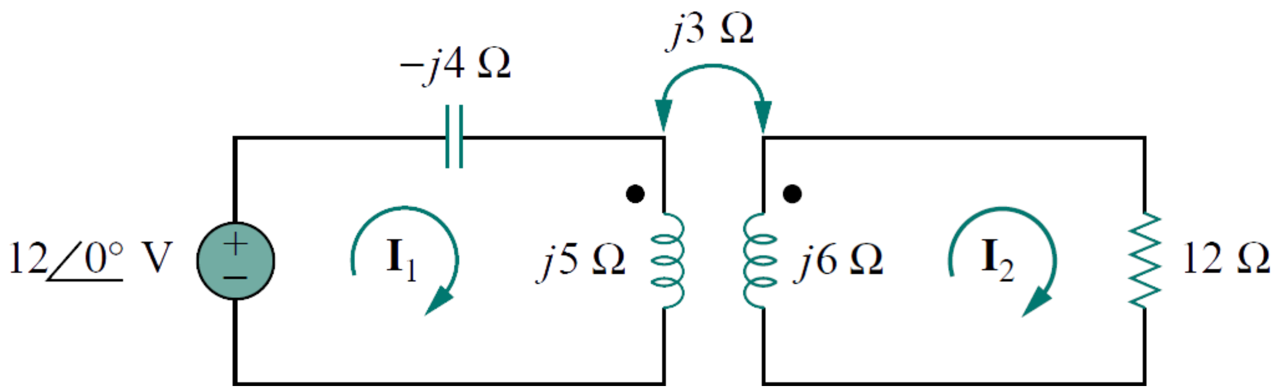


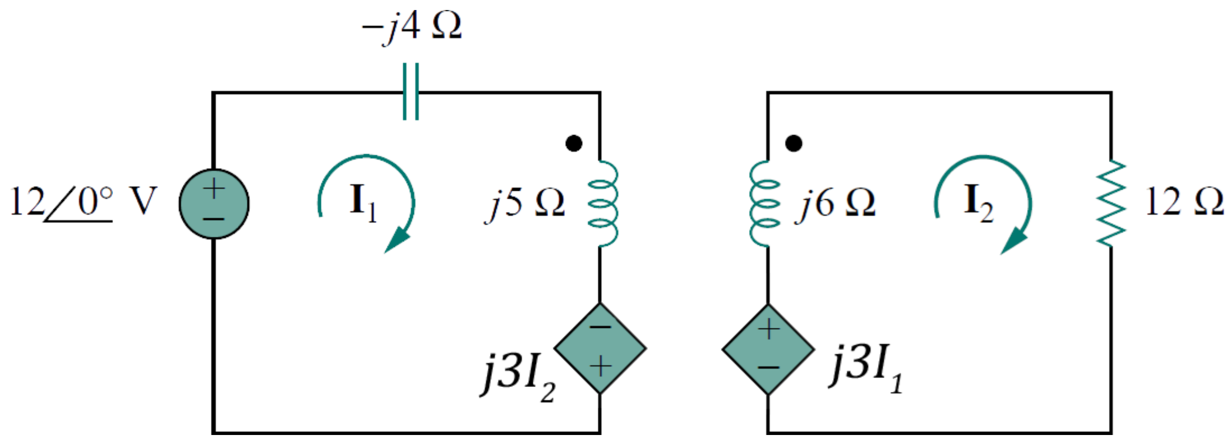
1. Considere o circuito de acoplamento magnético
2. Remova a indicação de indutância mútua e posicione as FTDCC, atenção aos fatores de controle
3. Defina os sinais apropriados de acordo com a convenção dos pontos

Exercício: Converta o circuito abaixo para o modelo mais intuitivo .



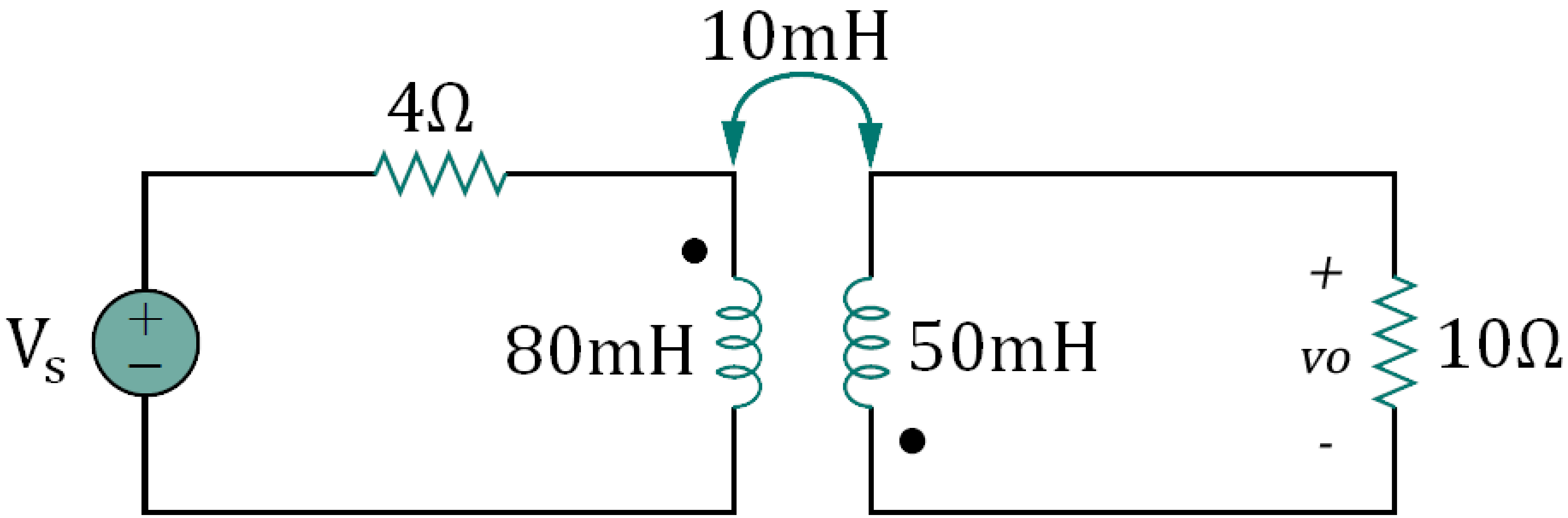
Exercício: Converta o circuito abaixo para o modelo mais intuitivo .



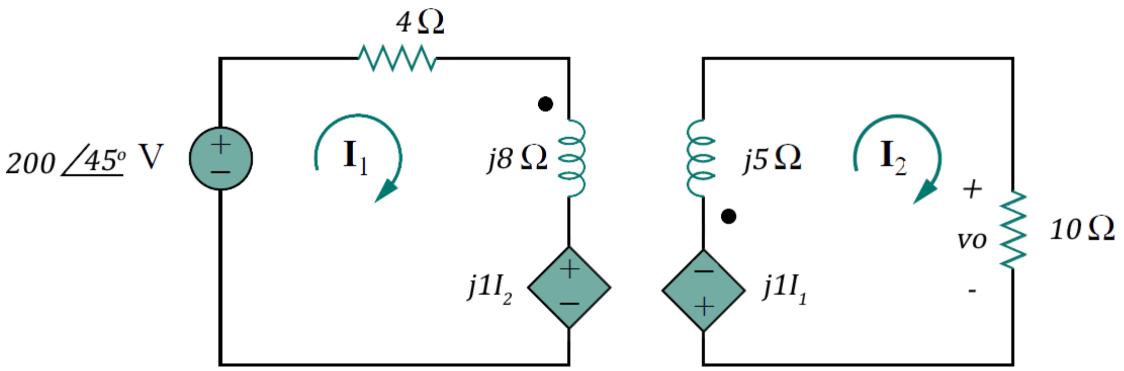


Acoplamento Magnético

Exercício: Calcule a tensão de saída para o circuito abaixo.
Sabendo que $V_s = 200 \cdot \cos(100t + 45^o)$.



Exercício: Converta o circuito abaixo para o modelo mais intuitivo .



$$-200\angle 45^o + j\mathbb{I}_2 + \mathbb{I}_1(4+j8) = 0$$

$$\mathbb{I}_1(\mathbf{4}+\boldsymbol{j}\mathbf{8}) + \boldsymbol{j}\mathbb{I}_2 = \mathbf{200\angle 45^o}$$

$$j\mathbb{I}_1 + \mathbb{I}_2(10+j5) = 0$$

$$\mathbb{I}_1 = \mathbb{I}_2(\mathbf{-5}+\boldsymbol{j}\mathbf{10})$$

$$\mathbb{I}_2(-5+j10)\cdot(4+j8) + j\mathbb{I}_2 = 200\angle 45^o$$

$$\mathbb{I}_2(-100+j) \ = 200\angle 45^o$$

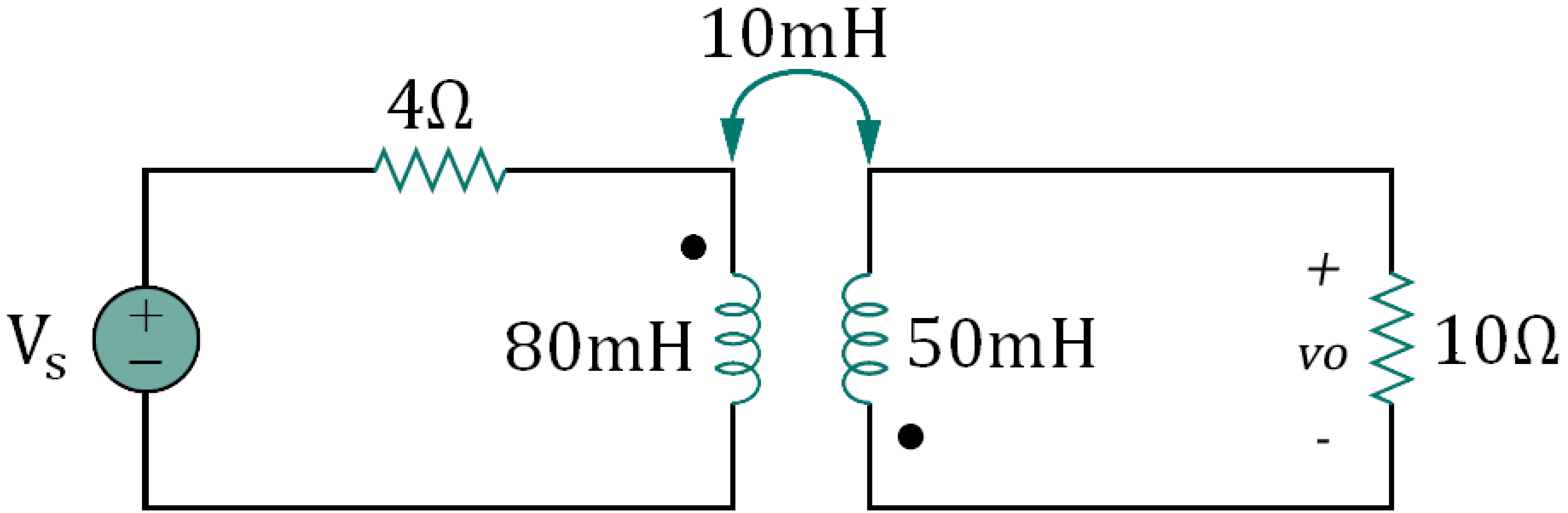
$$\mathbb{I}_2 = \frac{200\angle 45^o}{100\angle 180^o} = 2\angle -135$$

$$\mathbb{V}_o = (\mathbf{2\angle -135^o})(\mathbf{10\angle 0^o})$$

$$\mathbb{V}_o = \mathbf{20\angle -135^o}$$

Acoplamento Magnético

Exercício: Encontre a função transferência $H(s) = \frac{V_o(s)}{V_s(s)}$, e a resposta em regime permanente ($v_o(t)$) considerando a entrada V_s do exercício anterior.



Valendo 1 ponto na P2 – Entregar até a próxima aula
As contas devem estar completas

Acoplamento Magnético

```
syms s vs I1 I2 t
A = [(4+0.08*s), 0.01*s; 0.01*s, (0.05*s + 10)];

I = (A^-1)*[vs;0];
ft = I(2)*10/vs;

ftjw = subs(ft,'s',100*i);

modft = abs(ftjw);

pretty(ft)

amplitude = modft*200
fase = (angle(ftjw)*180/pi)+45
```

$* \boldsymbol{DICA}$

```
                 1000 s
  - ------------------------
           2
     39 s  + 10000 s + 400000

amplitude =

   19.9990


fase =

 -134.4271
```

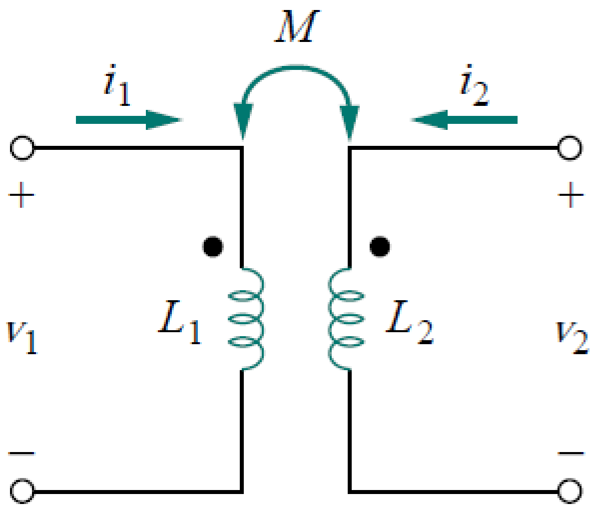
Energia em um circuito acoplado

Sabemos que a energia é a integral da potência. A primeira etapa consiste em mensurar a energia armazenada no indutor 1

$$p_1(t) = v_1 i_1 = i_1 L_1 \frac{di_1}{dt}$$

Assim, a energia armazenada em L1 entre 0 e a máxima amplitude de I1, mantendo i2 igual a zero é:

$$w_1(t) = \int p_1 dt = L_1 \int_0^{I_1} i_1\, di_1 = \frac{1}{2} L_1 I_1^2$$



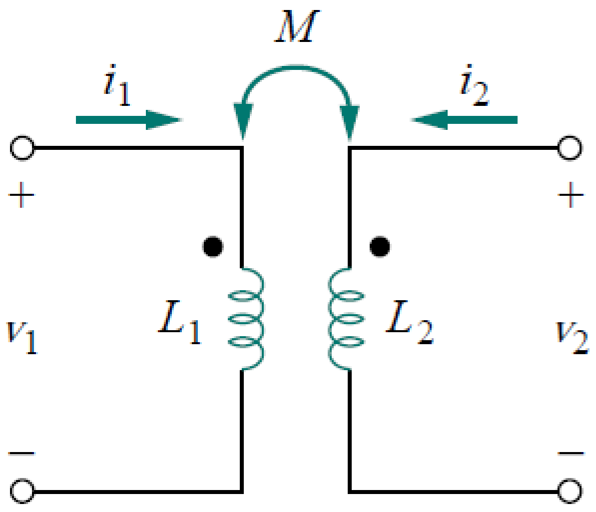
Mantendo i1 =I1 e aumentando i2 de zero até I2, a tensão mútua induzida na bobina 1 será $M_{12}\, di_2/dt$, enquanto a tensão mútua na bobina 2 será zero, pois a corrente i1 não está variando

$$p_2(t) = i_1 M_{12} \frac{di_2}{dt} + i_2 v_2 = I_1 M_{12} \frac{di_2}{dt} + i_2 L_2 \frac{di_2}{dt}$$

$$\boldsymbol{w_2(t) = \int p_2 dt = M_{12} I_1 \int_0^{I_2} di_2 = L_2 \int_0^{I_2} i_2 di_2 = M_{12} I_1 I_2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2}$$

Energia em um circuito acomplado

A energia total armazenada no circuito será: $w = w_1 + w_2$



$$w = \frac{1}{2}L_1 I_1^2 + \frac{1}{2}L_2 I_2^2 + M_{12}\, I_1 I_2$$

A energia total armazenada deverá ser a mesma independente de com atingimos as condições finais, se começarmos aumentando i2, a equação final será

$$w = \frac{1}{2}L_1 I_1^2 + \frac{1}{2}L_2 I_2^2 + \boldsymbol{M_{21}}\, I_1 I_2$$

Assim $M = M_{12} = M_{21}$

O sinal positivo no termo da indutância mútua é referente a convenção do ponto, de forma geral podemos estabelecer: *Positivo quando a corrente entra no ponto e negativo quando sai, colocamos os termos de corrente para calcular a energia instantânea.

$$\boldsymbol{w = \frac{1}{2}L_1 i_1^2 + \frac{1}{2}L_2 i_2^2 \pm M i_1 i_2}$$

Energia em um circuito acomplado

A energia armazenada nunca será negativa, na pior das hipóteses será zero

$$\frac{1}{2}L_1 i_1^2 + \frac{1}{2}L_2 i_2^2 - M i_1 i_2 \geq 0$$

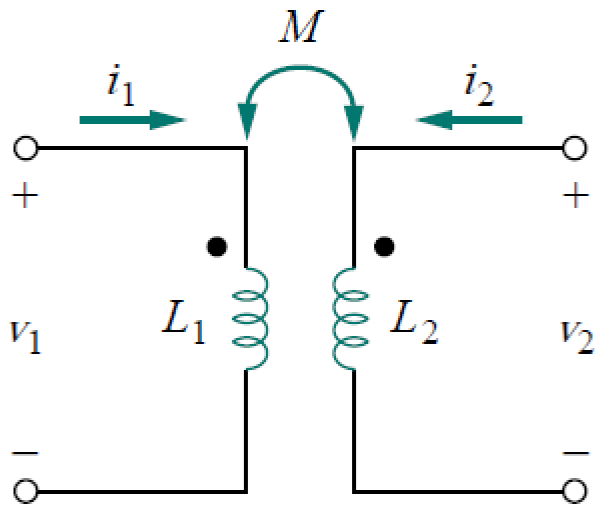
Reorganizando a equação: Resolva a equação abaixo para entender a etapa

$$\frac{1}{2}\left(i_1\sqrt{L_1} - i_2\sqrt{L_2}\right)^2 + i_1 i_2\left(\sqrt{L_1 L_2} - M\right) \geq 0$$

O termo quadrático nunca será negativo, portanto:

$$\boldsymbol{M \leq \sqrt{L_1 L_2}}$$

Concluímos que a indutância mútua não pode ser maior que a média geométrica das indutâncias das bobinas

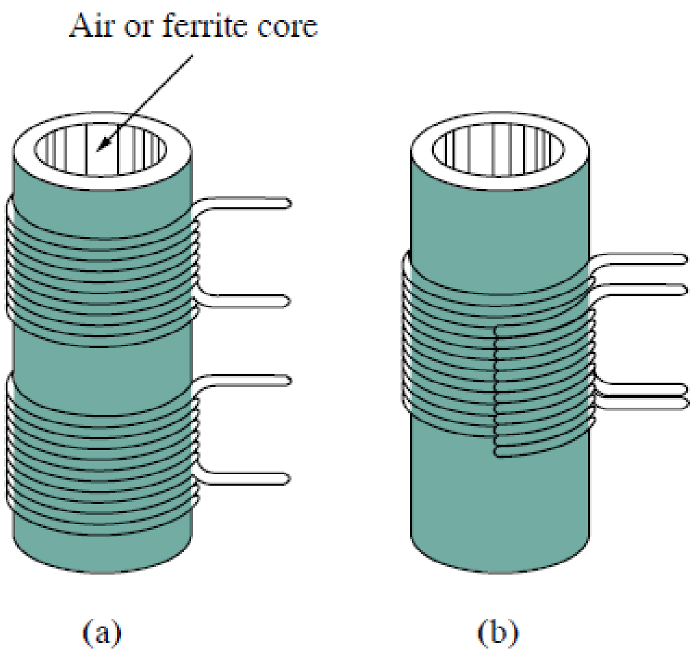


O grau com que a indutância mútua se aproxima do limite superior é especificado pelo coeficiente de acoplamento

$$\boldsymbol{k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}}$$

Onde K varia de 0 a 1

Acoplamento Magnético



Livremente acopladas **Firmemente acopladas**

Se todo o fluxo produzido por uma bobina atravessa a outra bobina , então **k=1** e temos um acoplamento 100% **ou bobinas perfeitamente acopladas**

Se **K<0,5**, diz-se que as bobinas estão **livremente acopladas**

Se **K>0,5**, diz-se que as bobinas estão **firmemente acopladas**

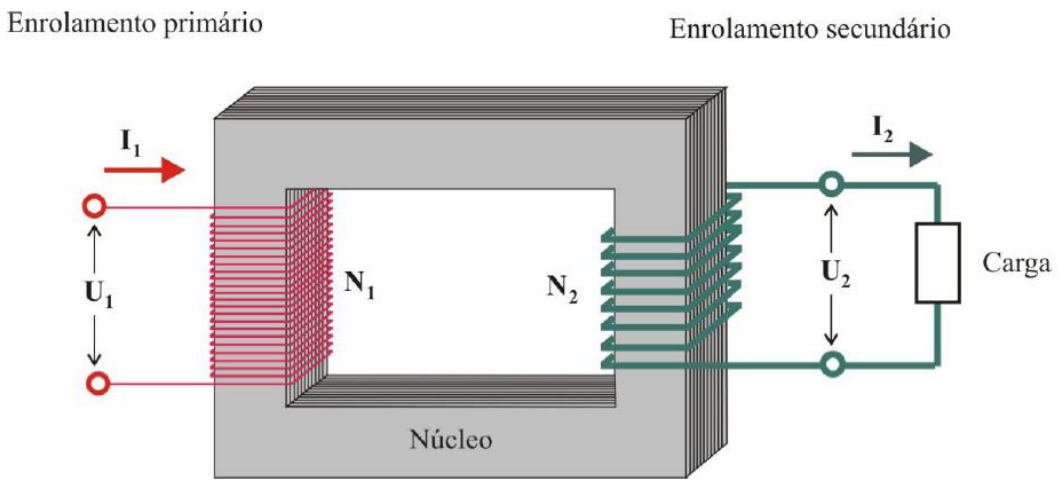
Lembrando que: $\mathbf{0 \leq k \leq 1}$

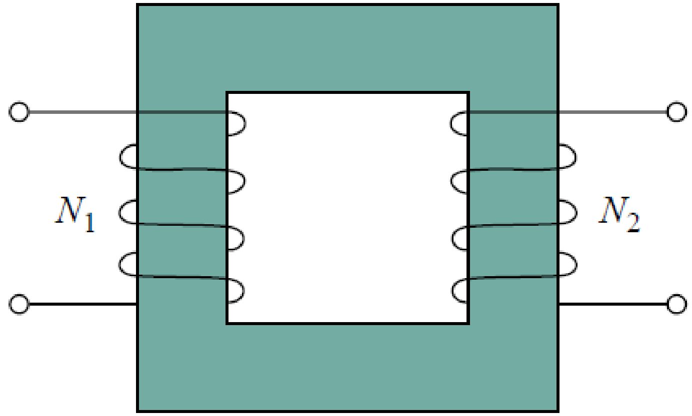
Transformador Ideal

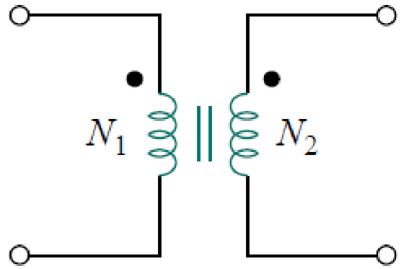
O transformador ideal é um acoplamento perfeito K=1, formado por duas ou mais boninas, com grande número de espiras e um núcleo de alta permeabilidade

Características:

1. As bobinas possuem indutâncias muito elevadas
2. O coeficiente de acoplamento é 1
3. As bobinas primária e secundária são sem perdas

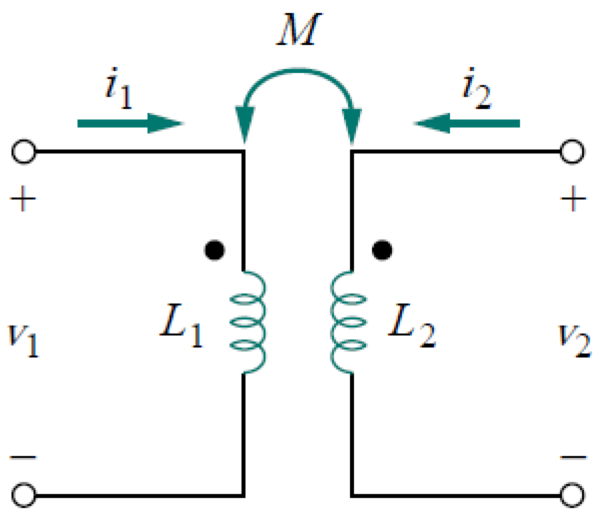






Transformador Ideal

Considerando o transformador ideal ao lado, as equações de tensão são:



$$\mathbf{V}_1 = j\omega L_1 \mathbf{I}_1 + j\omega M \mathbf{I}_2$$
$$\mathbf{V}_2 = j\omega M \mathbf{I}_1 + j\omega L_2 \mathbf{I}_2$$

Isolando I1 na primeira equação e substituindo na segunda, temos:

$$\mathbf{V}_2 = j\omega L_2 \mathbf{I}_2 + \frac{M\mathbf{V}_1}{L_1} - \frac{j\omega M^2 \mathbf{I}_2}{L_1}$$

Como $k = 1$, então $M = \sqrt{L_1 L_2}$

$$\mathbf{V}_2 = j\omega L_2 \mathbf{I}_2 + \frac{\sqrt{L_1 L_2}\mathbf{V}_1}{L_1} - \frac{j\omega L_1 L_2 \mathbf{I}_2}{L_1} = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}}\mathbf{V}_1 = n\mathbf{V}_1$$

Em transformadores ideais, a constante **n** é constante independente dos parâmetros de autoindutância

A constante **n** é conhecida como **relação entre espiras**

Transformador Ideal

Como mencionado anteriormente, a tensão no indutor é definida pela por (Lei de Faraday):

Primário

$$v_1 = N_1 \frac{d\phi}{dt}$$

Secundário

$$v_2 = N_2 \frac{d\phi}{dt}$$

A razão entre as tensões resulta em:

Instantânea

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{N_2}{N_1} = n$$

Fasorial

$$\frac{\mathbb{V}_2}{\mathbb{V}_1} = \frac{N_2}{N_1} = n$$

Pela conservação de energia e considerando que não há perdas em um transformador ideal

$$v_1 i_1 = v_2 i_2 \quad ou \quad \mathbb{V}_1 \mathbb{I}_1 = \mathbb{V}_2 \mathbb{I}_2$$

Assim:

$$\frac{\mathbb{I}_1}{\mathbb{I}_2} = \frac{\mathbb{V}_2}{\mathbb{V}_1} = n$$

$$\frac{\mathbb{I}_2}{\mathbb{I}_1} = \frac{N_1}{N_2} = \frac{1}{n}$$

Transformador Ideal

Se $n = 1$ → Temos um transformador de isolamento
A tensão no **secundário** é **igual** no primário

Se $n > 1$ → Temos um transformador elevador de tensão
A tensão no **secundário** é **maior** que no primário

Se $n < 1$ → Temos um transformador abaixador de tensão
A tensão no **secundário** é **menor** que no primário

Como a tensão induzida pode ser positiva ou negativa, de acordo com a convenção do ponto, considere o módulo de n

Empresas de geração de energia elétrica normalmente geram uma tensão conveniente e usam transformadores elevadores para aumentar a tensão, assim podem transmitir alta tensão e baixa corrente pelas linhas de transmissão, resultando em economia significativa. Próximo as residências são usados transformadores abaixadores para reduzir a tensão.

Transformador Ideal

Exercício: Um determinado transformador ideal com N1 = 600 espiras e N2= 500 espiras, tem tensão da rede de $220V_{RMS}$. Pretende-se obter no secundário do transformador, dois níveis de tensão (V2 e V2'). Calcule:

a) O valor de V2 para N2 total.
b) A posição do Tap no secundário (número de espiras) que permite obter V2' = 8 V.

$$Resp\colon\ V_2 = 183{,}33V \quad e \quad 22\, espiras$$

Transformador Ideal

Exercício: Um determinado transformador ideal com N1 = 600 espiras e N2= 500 espiras, tem tensão da rede de $220V_{RMS}$. Pretende-se obter no secundário do transformador, dois níveis de tensão (V2 e V2'). Calcule:

a) O valor de V2 para N2 total.
b) A posição do Tap no secundário (número de espiras) que permite obter V2' = 8 V.

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{N_2}{N_1} = \frac{V_2}{220} = \frac{500}{600} \quad \therefore \quad V_2 = 183{,}33V$$

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{N_2}{N_1} = \frac{8}{220} = \frac{N_2}{600} \quad \therefore \quad N_2 = 22\ espiras$$

Transformador Ideal

Exercício: Ao aplicar-se $220V_{RMS}$ a 500 espiras do primário de um transformador, obteve-se no secundário $150V_{RMS}$. Calcule:

a) o número de espiras do secundário

b) A tensão que se obteria no secundário se os mesmos $220V_{RMS}$ fossem aplicados no primário, mas apenas a 400 das suas espiras.

c) A tensão que se obteria no secundário se os mesmos $220V_{RMS}$ fossem aplicados no primário, mas agora a 600 espiras.

$\boldsymbol{Respostas}$: $a)\ 340\ espiras \quad b)\ 187V \quad c)\ 124{,}67V$

Transformador Ideal

Exercício: Ao aplicar-se $220V_{RMS}$ a 500 espiras do primário de um transformador, obteve-se no secundário $150V_{RMS}$. Calcule:

a) o número de espiras do secundário

b) A tensão que se obteria no secundário se os mesmos $220V_{RMS}$ fossem aplicados no primário, mas apenas a 400 das suas espiras.

c) A tensão que se obteria no secundário se os mesmos $220V_{RMS}$ fossem aplicados no primário, mas agora a 600 espiras.

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{N_2}{N_1} = \frac{150}{220} = \frac{N_2}{500} \quad \therefore \quad N_2 = 340\ espiras$$

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{N_2}{N_1} = \frac{V_2}{220} = \frac{340}{400} \quad \therefore \quad V_2 = 187V$$

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{N_2}{N_1} = \frac{V_2}{220} = \frac{340}{600} \quad \therefore \quad V_2 = 124{,}67V$$